









وزارة المعارف العمومية

---

# كتاب الجبر الابتدائي

---

تأليف

هول ونايت

---

## الجزء الأول

من الباب الأول الى الباب الحادى والثلاثين

---

ترجم الى العربية بأمر وزارة المعارف العمومية  
مع تعديل بعض الأمثلة والتمارين بما يلائم حالة المدارس المصرية

(حقوق الطبع محفوظة للوزارة)

---

المطبعة الأميرية بالقاهرة  
١٩٢٥



## محتويات

### الجزء الأول من كتاب الجبر الابتدائي

صفحة	
١	الباب الأول — تعاريف — التعويض ... ..
١٢	» الثاني — الكميات السالبة وجمع الحدود المتشابهة ... ..
١٦	» الثالث — الأقواس البسيطة — الجمع ... ..
٢٤	» الرابع — الطرح ... ..
٢٧	أُسئلة متنوعة (١) ... ..
٢٩	» الخامس — الضرب ... ..
٤٥	» السادس — القسمة ... ..
٥٣	» السابع — إزالة الأقواس وإدخالها ... ..
٥٩	» الثامن — المعادلات البسيطة ... ..
٦٩	» التاسع — التعبير بالرموز ... ..
٧٩	» العاشر — مسائل تؤل في حلها إلى معادلات بسيطة ... ..
	» الحادى عشر — العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقادير الجبرية
٨٤	البسيطة ... ..
٨٦	» الثانى عشر — الكسور البسيطة ... ..
٩٠	أسئلة متنوعة (٢) ... ..
٩٢	» الثالث عشر — المعادلات الآنية المتعددة المجاهيل ... ..
١٠١	» الرابع عشر — مسائل تؤدى إلى معادلات آنية ... ..
١٠٦	» الخامس عشر — الرفع إلى القوى ... ..
١١٠	» السادس عشر — استخراج الجذور ... ..
١٢١	» السابع عشر — التحليل إلى العوامل ... ..
١٣٨	أُسئلة متنوعة (٣) ... ..
١٤١	» الثامن عشر — العامل المشترك الأعلى ... ..
١٤٩	» التاسع عشر — الكسور ... ..
١٥٥	» العشرون — المضاعف المشترك البسيط ... ..

الباب الحادى والعشرون — جمع الكسور وطرحها ١٥٩ ... ..  
 » الثانى والعشرون — كسور متنوعة ١٧٠ ... ..  
 » الثالث والعشرون — أسئلة متنوعة (٤) ١٨٠ ... ..  
 » الثالث والعشرون — معادلات أصعب من السابقة ١٨٥ ... ..  
 » الرابع والعشرون — مسائل أصعب من المتقدمة ١٩٢ ... ..  
 » الخامس والعشرون — المعادلات ذات الدرجة الثانية ١٩٨ ... ..  
 » السادس والعشرون — المعادلات الآتية التى من الدرجة الثانية ٢١٠ ... ..  
 » السابع والعشرون — مسائل يؤدى حلها إلى استعمال معادلات من الدرجة الثانية ٢١٨ ... ..  
 » الثامن والعشرون — عوامل أصعب من السابقة ٢٢٣ ... ..  
 » التاسع والعشرون — نظريات وأمثلة متنوعة ٢٣١ ... ..  
 » الثلاثون — نظريات الأمس ٢٥١ ... ..  
 » الحادى والثلاثون — مبادئ الجذور الصماء ٢٦٥ ... ..



# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## كتاب الجبر الابتدائي

### الجزء الأول

#### الباب الأول - تعاريف ، التعويض

بند ١ - الجبر كالحساب يبحث فيه عن الكيات ولكن بطريقة أعم لأن الكيات في العمليات الحسابية تبين بأرقام ذات قيم محدودة لا تتغير . ولكن في الجبرتين الكيات برموز تعطي لها أى قيمة تراد وتلك الرموز هى حروف الهجاء ثم إن الحروف وإن لم تقيد بقيم مخصوصة إلا أن قيمتها في العملية الواحدة تبقى واحدة لا تتغير

مثلا : إذا قيل لتكن  $١ = ١$  فليس معناه أن  $١$  دائما بل إنها تساويه في العملية التي نكون مشتغلين بها . وفضلا عن ذلك لنا أن نستعمل هذه الرموز بدون وضع قيم مخصوصة لها وهذا في الحقيقة من أهم ما يبحث فيه علم الجبر

ولنبدا الآن بالتعاريف الجبرية مع العلم بأن العلامات  $+$  ،  $-$  ،  $\times$  ،  $\div$  ،  $=$  تدل في الجبر على ما تدل عليه من المعاني في الحساب وأن كل الرموز الجبرية التي نستعملها الآن تدل على أعداد صحيحة فقط

بند ٢ - المقدار الجبرى هو مجموع رموز ويتكوّن من (حدّ) أو عدّة (حدود) منفصل بعضها عن بعض بالعلامتين  $+$  ،  $-$  أو بإحداهما

(مثلا  $١٧ + ٥ - ٣ - ٢$  ص مقدار جبرى ذو خمسة حدود

(تنبيه) إذا لم يسبق الحدّ علامة يعتبر مسبوقا بالعلامة  $+$

بند ٣ - المقدار الجبرى إما بسيط أو مركب . فالبسيط ما تركب من حدّ مثل  $٥$  أو المركب ما تركب من حدّين فصاعدا . فإذا كان المقدار ذا حدّين سمى ذا الحدين مثل  $٣ - ٢$  وإذا كان ذا ثلاثة حدود سمى ذا ثلاثة الحدود مثل  $٢ - ٣ + ٥$  فإذا زاد على ذلك سمى كثير الحدود وقد يسمى المقدار البسيط مقدارا ذا حدّ واحد أيضا



(مثال ٢) إذا كانت  $b = 0$  فما الفرق بين  $a^2$  و  $a$  ؟

الجواب  $a^2 = a \times a = 0 \times 0 = 0$

$$a^2 - a = 0 - 0 = 0$$

(مثال ٣) إذا كان  $a = 1$  و  $b = 6$  فما قيمة  $a^2$  ؟

الجواب  $a^2 = 1 \times 1 = 1$

$$a^2 - a = 1 - 1 = 0$$

(ملاحظة) يجب أن يلاحظ المبتدئ أن كل قوة للواحد تساوى واحد

من المعلوم أن حاصل الضرب في الحساب لا يتغير بتغيير موضع العوامل فمثلاً  $3 \times 4$  تدل على ٣ مكورة ٤ مرات  $4 \times 3$  تدل على ٤ مكورة ٣ مرات والناتج في كلتا الحالتين ١٢

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

وحينئذ يكون

$$3 \times 0 \times 4 = 0 \times 3 \times 4 = 0 \times 4 \times 3$$

وكذلك

وهذه القاعدة عامة مهما كان عدد العوامل

وكذلك  $a \times b$  معناها حاصل ضرب كميتين تدل عليهما  $a$  و  $b$  فقيمة حاصل الضرب واحدة في كلتا الحالتين

وكذلك  $a \times b \times c$  معناها حاصل ضرب الكميات الثلاث  $a$  و  $b$  و  $c$  بعضها في بعض فليس من الأمور الجوهرية حينئذ مراعاة أى ترتيب خاص في كتابة عوامل أى كمية وإن كان المعتاد أن يراعى في وضعها أن تكون على ترتيب حروف المعجم

إذا كان المعامل الكسرى أكبر من الواحد يبقى عادة على هيئة عدد كسرى

(مثلاً) إذا كانت  $a = 1$  و  $b = 6$  و  $c = 7$  فما قيمة  $a^{\frac{13}{11}}$  ؟

$$a^{\frac{13}{11}} = 1^{\frac{13}{11}} = 1$$

$$a^{\frac{13}{11}} = 1^{\frac{13}{11}} = 1$$

## (تمارين ١١)

إذا كانت  $a = 1$  و  $b = 6$  و  $c = 7$  فما قيمة كل من المقادير الآتية

(١) $a^{14}$ سر	(٥) $b \times c$ ص	(٩) $a^4$ ص	(١٣) $a \times b \times c$ ص
(٢) $a^2$ سر	(٦) $a^2$ ص	(١٠) $a^4$ ص	(١٤) $a^7$ ص
(٣) $a^{13}$ سر	(٧) $a^2$ ص	(١١) $a^7$ ص	(١٥) $a^8$ سر
(٤) $a^2$ سر	(٨) $a^2$ سر	(١٢) $a^9$ ص	



### (تمارين ١ ب)

إذا كانت  $١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$  صفرا  $٥ = ٦ = ٧ = ٨ = ٩$  فما قيمة كل من المقادير الآتية

$(١) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٣) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٤) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$
$(٥) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٦) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٧) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٨) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$
$(٩) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١٠) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١١) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١٢) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$

إذا كانت  $١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$  صفرا  $٥ = ٦ = ٧ = ٨ = ٩$  فما قيمة كل من المقادير الآتية

$(١٣) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١٤) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١٥) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١٦) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$
$(١٧) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١٨) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(١٩) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢٠) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$
$(٢١) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢٢) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢٣) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢٤) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$
$(٢٥) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢٦) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢٧) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$	$(٢٨) \quad ١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$

بند ١٢ - تعريف : الجذر التربيعي لأي مقدار جبري هو الكمية التي يساوي مربعها أى قوتها الثانية ذلك المقدار فمثلا  $٩ =$  الجذر التربيعي للعدد  $٨١$  لأن  $٩^٢ = ٨١$  والعلامة  $\sqrt{\quad}$  تسمى علامة الجذر

يكتب الجذر التربيعي للكمية  $٢$  هكذا  $\sqrt{٢}$  أو  $\sqrt[٢]{٢}$  والصورة الثانية أبسط من الأولى فهي أكثر شيوعا

وعلى هذا النحو نقول إن الجذر التكعيبي والرابع والخامس إلخ لأي مقدار جبري هو الكمية التي تساوي قوتها الثالثة أو الرابعة أو الخامسة إلخ ذلك المقدار الجبري

وتبين تلك الجذور بالعلامات  $\sqrt[٣]{\quad}$   $\sqrt[٤]{\quad}$   $\sqrt[٥]{\quad}$  وهكذا على الترتيب

فمثلا :  $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$  لأن  $٣^٣ = ٢٧$   $\sqrt[٤]{٢٥٦} = ٤$  لأن  $٤^٤ = ٢٥٦$

(مثال ١) ما قيمة  $\sqrt[٥]{٢٥٦}$  ؟ حينما تكون  $١ = ٧ = ٦ = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١$

الجواب  $\sqrt[٥]{٢٥٦} = ٤$  لأن  $٤^٥ = ٢٥٦$

$\sqrt[٥]{٢٥٦} = ٤$  لأن  $٤^٥ = ٢٥٦$

$\sqrt[٥]{٢٥٦} = ٤$  لأن  $٤^٥ = ٢٥٦$

(مثال ٢) ما قيمة  $\sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧}}$  حيناً تكون  $١ = ٢٧ = ٣ = ٨ = ٥$

$$\sqrt[3]{\frac{٨١ \times ٩}{١٢٥ \times ٨}} = \sqrt[3]{\frac{٣ \times ٩}{٥ \times ٨}} = \sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧}}$$

$$\frac{٩}{١٠} = \sqrt[3]{\frac{٩ \times ٩ \times ٩}{١٠٠٠}} =$$

(تمارين ١ - ٢)

إذا كانت  $١ = ٨ = ٦ = ٤ = ٩ = ٥ = ٦ = ٤ = ٥ = ١$  فما قيمة كل من المقادير الآتية

$\sqrt[3]{\frac{١٦}{٢٧}}$ (١٥)	$\sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧}}$ (٨)	$\sqrt[3]{٢٧}$ (١)
$\sqrt[3]{\frac{٩}{٢٧}}$ (١٦)	$\sqrt[3]{\frac{٢٧}{٢٧}}$ (٩)	$\sqrt[3]{٢٧}$ (٢)
$\sqrt[3]{\frac{١٢}{٢٧}}$ (١٧)	$\sqrt[3]{\frac{٥}{٢٧}}$ (١٠)	$\sqrt[3]{٢٧}$ (٣)
$\sqrt[3]{\frac{٢٧}{٢٧}}$ (١٨)	$\sqrt[3]{\frac{٣}{٢٧}}$ (١١)	$\sqrt[3]{٢٧}$ (٤)
$\sqrt[3]{\frac{١٥}{٢٧}}$ (١٩)	$\sqrt[3]{\frac{٢}{٢٧}}$ (١٢)	$\sqrt[3]{٢٧}$ (٥)
$\sqrt[3]{\frac{٢٧}{٢٧}}$ (٢٠)	$\sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧}}$ (١٣)	$\sqrt[3]{٢٧}$ (٦)
$\sqrt[3]{\frac{١٥}{٢٧}}$ (٢١)	$\sqrt[3]{\frac{١٥}{٢٧}}$ (١٤)	$\sqrt[3]{٢٧}$ (٧)

بند ١٣ - إذا اشتمل المقدار الجبري على أكثر من حد نجري العمل في كل حد على انفراد حسب القواعد السابقة ثم نستخرج القيمة العددية للمقدار كله بإجراء العمل في النتائج حسباً تستلزمه العلامات وإذا كان هناك أقواس ( ) تعتبر كل الحدود المحصورة بين كل قوسين كية واحدة كما الحال في الحساب

(مثال ١) إذا كانت  $٥ = ٤ - ٣ + ٢ - ١ = ٥$  فما قيمة  $٤ - ٣ + ٢ - ١$

$$\text{الجواب} \quad ٤ = ٤ - ٣ + ٢ - ١ = ٥$$

$$٢٠ = ٥ \times ٤ = ٢٠$$

$$٢٥٠ = ٥ \times ٥ \times ١٠ = ٢٥ \times ١٠ = ٢٥٠$$

$$٧٥ = ٥ \times ٥ \times ٣ = ٢٥ \times ٣ = ٧٥$$

$$٧٨٠ = ٧٥ - ٢٥٠ + ٢٠ - ٢٥ =$$

فالأحوية إذن ٢١ ٥ ٦ ٦ صفر ٦ صفر ٥

بند ١٥ - على الطالب أن يراعى القواعد الآتية في حل التمارين الجبرية  
(أولا) حسن الترتيب وإحكام الوضع فإن ذلك يساعد كثيرا على صحة العمل  
(ثانيا) لا يجوز مطلقا استعمال علامة = إلا بين الكميات المتساوية فيجب الامتناع عن النصوص  
أو عدم الصحة في استعمالها  
(ثالثا) إذا لم تكن المقادير الجبرية قصيرة جدا يلزم وضع علامات التساوى بعضها تحت بعض  
ثناء السير في العملية  
(رابعا) يجب أن تبين كيفية التدرج في إجراء العملية بحيث يظهر من العمل كيفية استنتاج  
كل شيء من الذي قبله ويحسن أحيانا أن يستعان على ذلك بكتابة شيء من الألفاظ التي تزيد في وضوح  
المسألة وهذا أمر هام ينبغي عدم

(تمارين ۱ ۵)

إذا كانت  $1 = 6_2 = 6_3 = 6_4 = \dots$  صفرا فما القيمة العددية لكل من المقادير الآتية

$$59 + 28 - 20 + 17(1).$$

$$50 + 27 + 48 - 12(2)$$

$$54 + 62 - 94 + 10(2)$$

$$f_5 = f_4 + \Delta u + u f_1(t) =$$

$$u_{52} + u_{20} - u_{52} + u_{20} - u_{16} (0)$$

$$u \uparrow s + s \uparrow u + s \uparrow u + u \uparrow s \quad (6).$$

$$u_1 s_1 - s_1 p_1 + s_1 u_1 - p_1 u_1 (v) \sim$$

$$u_1 \circ + 1 s \xi - s \partial \Psi + \partial u \Psi (\lambda).$$

$$201 + 2157 - 1520 + 5203 (9).$$

$$V_s + V_p + V_w + V_f \quad (10)$$

$$L_2 = L_1 + \frac{1}{2} L_1 (11)$$

$$x^2 - 5x + 4 \quad (12)$$

إذا كانت  $1 = 0 \ 6 \ 1 = 0 \ 6 \ 2 = 0 \ 6 \ 3 = 0 \ 6 \ 4 = 0$  صفراً فما القيمة العددية لكل من المقادير الآتية

$$r_s + r_p + r_c + r_f \quad (14)$$

$$251 \frac{1}{2} - 5 - 11 - 2 = \frac{1}{2} (14) \quad \checkmark$$

११५-१८-१८१३ (१०)

$$u_1^2 - 1s^2 - 5p^2 - 7q^2 - 5r^2 + 2s^2 + 1t^2 + 4u^2 \quad (17)$$





(٤) إذا كانت قيمة  $س$  على التعاقب ٢ ٦ ٨ ٦ ١٠ فاقم المقدار  $\frac{س^2}{١٠} + \frac{س^2}{١٠} + ٢ - س$

(٥) بين أن المقدارين

٤ (١ - ب) + ٣ (١ + ب) + ٥ (١ + ب) + ٢ (١ - ب) يتساويان إذا كانت ١ = ١٠ ٦ = ٣ ثم قارن بين المقدارين إذا كانت ١ = ٦ ٦ = ب = صفرا

(٦) بين أن المقدار  $س^2 - ٦س + ١١ - س$  يساوى صفرا إذا كانت  $س = ١$  أو  $٢$  أو  $٣$  ثم أوجد قيمة ذلك المقدار إذا كانت  $س = ١٠$

(٧) بين أن المقدار  $س^2 - ١٣س + ٤٤ - س$  يساوى ٣٢ إذا كانت  $س = ١$  أو  $٤$  أو  $٨$

(٨) بين أن  $س^2 + ١٠س$  يساوى ٧ إذا كانت  $س =$  صفرا أو  $٢$  أو  $٥$  ثم إذا فرضنا أن  $س = ٦$  فأى المقدارين أكبر وما الفرق بينهما

(٩) إذا كانت  $س = ٣$  ٦ = صف = ٢ فبين أن

٦  $س^2 + ٧س - صف = صف^2 + (٢س + صف) (٣س - صف) (س + صف)$

(١٠) ما قيمة المقدار  $٤س^2 + ٤س - ٣$  إذا كانت  $س$  تساوى ٢ وما قيمته إذا كانت  $س = \frac{١}{٢}$

(١١) بين أن  $٤س + ٤س - ٣$  يساوى ٩ (س + ٨) إذا كانت  $س = ٥$

(١٢) بين أنه إذا كانت  $س = \frac{١}{٢}$  أو  $\frac{٣}{٢}$  فالمقدار  $٦س^2 - ١١س + ٣$  يساوى صفرا ثم أوجد قيمة هذا المقدار بالكسر العشري إذا كانت  $س = \frac{١}{٢}$

### (أمثلة للاعادة شفها)

(١) ما الفرق بين ٦٣ ٦ ٣ × ٦

(٢) ما معنى ٤٥ = صف ٦ × ٥ ٤ = صف وما القيمة العددية لكل من المقدارين إذا كانت  $س = ٤$  ٦ = صف = ٥

(٣) أى الكيتين أكبر ٢٤٥ أو ٤ × ٤ × ٢ وما الفرق بينهما

(٤) بين حاصل ضرب ط في ل بثلاثة أوضاع مختلفة

(٥) خمسة أولاد مع كل منهم ك من الكرات فما مقدار ما معهم جميعا مبيتا بالجبر وإذا كانت ك = ٢٥ كرة فما قيمة ذلك المقدار الرقمية

(٦) إذا قسم مقدار  $س$  من التفاح على ستة أولاد بالتساوى فما نصيب كل منهم مبيتا بالجبر وما مقدار ذلك النصيب إذا كانت  $س = ٤٢$

(٧) إذا وزع ٥٤ كتابا على ٧ من الأولاد بالتساوى فما نصيب كل منهم مبيتا بالجبر وما مقدار ذلك النصيب إذا كانت ٦ = ٦

- (٨) ما الفرق بين ضعف ٣ و مربع ٣
- (٩) اكتب المقدارين الجبريين اللذين يساوي أحدهما ثلاثة أمثال  $z$  والآخر مكعب  $z$  وأوجد قيمة كل منهما إذا كانت  $z = 2$
- (١٠) ما الفرق بين أربعة أمثال  $س$   $6س$  أس أربعة وما قيمة كل منهما إذا كانت  $س = 3$
- (١١) إذا أريد ضرب  $ح$  في  $س$  فبأي كيفية يبين ذلك جبريا وما حاصل الضرب إذا كانت  $ح = 7$   $6س = 3$
- (١٢) إذا أريد ضرب  $س$  من العوامل بعضها في بعض وكان كل منها يساوي  $ح$  فكيف يبين ذلك جبريا وما قيمة حاصل الضرب إذا كانت  $س = 3$  والعامل  $ح = 7$
- (١٣) يراد جمع  $ا$   $ب$   $6ب$   $6$  فبين ذلك بالجبر وأوجد حاصل الجمع إذا كانت  $ا = 5$   $6ب = 7$   $6 = 11$
- (١٤) يراد طرح الكمية  $ص$  من الكمية  $س$  فبين ذلك بالجبر وأوجد باقي الطرح إذا كانت  $ص = 27$   $6س = 41$
- (١٥) لعب ولد بكرات (بليات) وكان معه  $س$  منها وبيع  $ص$  فما مجموع ما معه بعد اللعب مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت  $س = 25$   $6ص = 9$
- (١٦) بعد أن ربح الولد (المذكور في السؤال ١٥) ما ربح خسر  $ع$  من الكرات فما مقدار ما بقي معه مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت  $ع = 17$
- (١٧) أخذ فلاح  $ز$  من الشياه للسوق وباع منها  $ح$  فكم بقي منها مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت  $ز = 6$   $6ح = 48$
- (١٨) أخذ فلاح  $هـ$  من الشياه للسوق وعاد بعدد منها مقداره  $ل$  فما مقدار ما باعه مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت  $هـ = 75$   $6ل = 33$
- (١٩) اكتب حاصل جمع وحاصل ضرب الكميات  $ا$   $6ب$   $6$  وأوجد مقدار كل من الحاصلين بالعدد إذا كانت  $ا = 5$   $6ب = 7$   $6 = 6$
- (٢٠) إذا مشيت  $ص$  من الساعات وقطعت في كل منها  $ص$  من الكيلومترات فما طول المسافة التي قطعتها مبينا بالجبر وإذا كانت  $ص = 4$  فما مقدار تلك المسافة بالعدد

## الباب الثانى - الكميات السالبة وجمع الحدود المتشابهة

بند ١٦ - فى الأمثلة المتقدمه لم يكن حاصل جمع الحدود المسبوقة بعلامه - اكبر من حاصل جمع الحدود المسبوقة بعلامه + بمعنى أنه أمكن بيان نتيجة كل عملية بالوضع الحسابى ولكن قد تكون للعملية نتيجة مثل ٤ - ٩ فلا يمكن حينئذ إجراء عملية الطرح حسابيا ولكن يمكننا بواسطة الجبر فهم هذه النتيجة كما أنه يمكننا أيضا بواسطة هذا العلم أن نستعمل حدودا مسبوقة بعلامه - واقعة منفردة وأن نفهم ما تدل عليه فهما تاما

بند ١٧ - تسمى الكميات الجبرية المسبوقة بعلامه + موجبة والمسبوقة بعلامه - سالبة . فان لم تسبق الكمية علامه صلت موجبة

وتستعمل هاتان العلامتان كثيرا للدلالة على معان خاصة للكميات التى تلحق بها كما سيظهر لك من الأمثلة الآتية

(مثال ١) إذا كسب تاجر ١٠٠ جنيه ثم خسر ٧٠ جنيتها فنتيجة متاجرته أنه كسب ٣٠ جنيتها أى أن + ١٠٠ جنيه - ٧٠ جنيتها = + ٣٠ جنيتها وهذه الكمية + ٣٠ جنيتها تدل على أن التاجر زادت ثروته بمقدار ٣٠ جنيتها ولكن إذا كان ربحه ٧٠ جنيتها وخسارته ٧٠ جنيتها لتكافأ الخسارة والربح أى أن + ٧٠ جنيتها - ٧٠ جنيتها = صفرا من الجنهيات فثروته بعد المتاجرة ثروته قبلها

أما إذا ربح أولا مسبعين جنيتها ثم خسر مائة جنيه فنتيجة متاجرته خسارة قدرها ثلاثون جنيتها أى أن + ٧٠ جنيتها - ١٠٠ جنيه = - ٣٠ جنيتها وهذه الكمية - ٣٠ جنيتها تدل على أن ثروة التاجر نقصت بمقدار ٣٠ جنيتها أو أنه مدين بمبلغ ٣٠ جنيتها ونستنتج مما سبق أن + ٣٠ جنيتها - ٣٠ جنيتها تدلان على كيتين متساويتين فى المقدار ولكن لكل منهما معنى خاصا بها تبين الأخرى فيه

(مثال ٢) لإفرض أن رجلا ركب زورقا من نقطة معينة فى نهر النيل وسار به ٦٠ مترا ضد التيار ثم ارجعته قوة التيار ٤٠ مترا فوضعه بالنسبة للنقطة التى ابتدأ منها يتعين بواسطة المقدار - ٦٠ مترا - ٤٠ مترا = + ٢٠ مترا ٦ + ٢٠ مترا فى هذه الحالة تدل على أنه سار من النقطة التى ابتدأ منها ٢٠ مترا فى اتجاه مضاد للتيار فلو أنه سار ٤٠ مترا من النقطة نفسها متجها ضد التيار أيضا ثم دفعه التيار القهقرى ٦٠ مترا فوضعه بالنسبة للنقطة التى ابتدأ منها يتعين بواسطة المقدار + ٤٠ مترا - ٦٠ مترا = - ٢٠ مترا ٦ - ٢٠ مترا فى هذه الحالة تدل أيضا على أنه على بعد عشرين مترا من النقطة التى ابتدأ منها ولكن فى اتجاه غير الاتجاه السابق فى الحالة الأولى أى فى اتجاه التيار ونستنتج إذن أن - ٢٠ مترا تدل على مسافة تساوى + ٢٠ مترا فى المقدار غير أن الاتجاهين مختلفان

(مثال ٣) فى مقاييس الحرارة المثوية تدل + ١٥ على ١٥ درجة فوق درجة تجمد الماء و - ١٥ على ١٥ درجة تحت درجة تجمد الماء فالدلالة من حيث عدد الدرجات واحدة فى الحالتين ولكن المعنيين متباينان

فنتخلص من الأمثلة المتقدمة أن  $+$  مثلًا تدل على كمية أكبر من الصفر بنحس وحدات  $6 -$  تدل على كمية أقل من الصفر بنحس وحدات أيضا فالقيمة المطلقة للكيتين واحدة إلا أن المؤدى في أحدهما مبين له في الأخرى

### (تمارين ١٢)

- (١) كسب تاجر ٢٠ جنبا ثم خسر ٤٢ جنبا ثم كسب ١٠ جنبا فين بالجبر نتيجة اتجاره
- (٢) فريقان لعب كل منهما الكرة مع آخرين ١٦ مرة ففريق فاز ١٠ مرات وخسر ٦ مرات والآخر فاز ٧ مرات وخسر ٩ مرات بين نتيجة كل من الفريقين معتبرا فوز المرة بزايد واحد وهزيمة المرة بناقص واحد
- (٣) انخفضت الحرارة بمقياس الحرارة المثوى إلى  $- 8^{\circ}$  في الليل ثم صعدت في النهار إلى  $+ 12^{\circ}$  فما الفرق بين الحالتين مقدرا بالدرجات
- (٤) ارتفعت الحرارة بمقياس الحرارة المثوى إلى  $9^{\circ}$  نهارا ثم هبطت  $15$  درجة أثناء الليل . فما النهاية الصغرى التي وصلت إليها درجة الحرارة بالليل
- (٥) زحفت قوقعة في اتجاه رأسى من نقطة معينة على جدار فصعدت مترين ثم هبطت  $5$  أمتار ثم أعادت الكرة فارتفعت مترين آخرين بين بالجبر موقعها الأخير بالنسبة للنقطة التي ابتدأت منها
- (٦) أطلق كل من رجلين ٢٠ عيارا ناريا على هدف وانفقا على أن يكون للصيب ٤ درجات في كل إصابة وأن ينحسر الخطى ٣ درجات في كل مرة فأصاب أحدهما المرمى ١٢ مرة والآخر ٨ مرات بين بالجبر ما نال كل منهما من الدرجات
- (٧) لعب كل من المدارس الخديوية والتوفيقية والسعيدية الكرة ٣٠ مرة في السنة ففازت الخديوية ٩ مرات وخسرت ٥ مرات وفازت التوفيقية ٦ مرات وخسرت ٨ مرات وفازت السعيدية ٩ مرات وخسرت ٩ مرات وتكافأت كل منها في المرات الباقية رتب المدارس الثلاث بحسب مبلغ نجاح كل منها معتبرا فوز المرة بزايد واحد وهزيمة المرة بناقص واحد وضع أمام كل مدرسة نتيجتها في اللعب كله مبينة بالوضع الجبرى

### جمع الحدود المتشابهة

بند ١٨ - تعريف : إذا لم تختلف الحدود في شيء ما أو كان اختلافها محصورا في المعامل الرقى فقط سميت حدودا متشابهة وإلا تسمى غير متشابهة  
فعلى ذلك  $١٧ ٦ ١٣$  وكذلك  $٥ ٦ ٢ ٦ ٢ ٦$  وأيضا  $٣ ٦ ٢ ٦ ٦ ٦$  -  $٤ ٦ ٢ ٦ ٢ ٦$  أزواج من حدتين متشابهين أما  $١٤ ٦ ٣ ٦ ٦ ٦$  وكذلك  $٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  فزوجان من حدتين غير متشابهين

قواعد جمع الحدود المتشابهة هي

القاعدة الأولى : حاصل جمع جملة حدود متشابهة حد يشابهها

القاعدة الثانية : إذا كانت جميع الحدود موجبة تضم المعاملات

(مثلا) لايحاد قيمة  $١٨ + ١٥$

نقول إن جمع  $١٨ + ١٥$  معناه إضافة ٨ أشياء من نوع واحد إلى ٥ أشياء متشابهة لها أى من نوعها فالحاصل إذن ١٣ شيئا من النوع نفسه

(مثلا)  $٨$  أرطال +  $٥$  أرطال =  $١٣$  رطلا فاذن  $١٨ + ١٥ = ١٣$

وعلى هذا النسق يكون  $١٨ + ١٥ + ١ + ١٢ + ١٦ = ١٢٢$

القاعدة الثالثة : إذا كانت جميع الحدود سالبة تضم المعاملات عدديا وتوضع علامة ناقص قبل حاصل الجمع

(مثلا) لجمع  $-٣ - ٦ - ٥ - ٦ - ٧ - ٦ - ٥ - ٦$

نقول إن المراد هنا التعبير بكمية سالبة واحدة عن مجموع أربع كميات سالبة متشابهة . فطرح ٣ أشياء ثم ٥ ثم ٧ ثم شيء واحد من النوع نفسه هو عين طرح  $٣ + ٥ + ٧ + ١$  أى ١٦ من هذه الأشياء نفسها دفعة واحدة

فاذن حاصل جمع  $-٣ - ٦ - ٥ - ٦ - ٧ - ٦ - ٥ - ٦$  هو  $-١٦$

القاعدة الرابعة : إذا لم تكن الحدود كلها متحدة العلامات تضم معاملات جميع الحدود الموجبة على حدة ومعاملات جميع الحدود السالبة على حدة والفرق بين المجموعتين مسبوqa بعلامة أكبرهما هو معامل حاصل الجمع

(مثال ١) ما حاصل جمع  $١٧ - ٦ - ٨$

هذا المثال يمكن تفسيره هكذا : ربح رجل ١٧ جنيا ثم خسر ٨ جنيات فالنتيجة أن الرجل ربح ٩ جنيات لأن الفرق بين ١٧ و ٨ هو ٩ والمكسب أى الكمية الموجبة أكبر من الخسارة أى الكمية السالبة فيكون حاصل جمع  $١٧ - ٦ - ٨$  هو ٩

(مثال ٢) حاصل جمع  $-١٧ - ٨ - ٦ - ٩$  هو  $-٩$

(مثال ٣) لايحاد حاصل جمع  $٨ - ٦ - ٩ - ٦ - ٣ - ٦ - ٤ - ٦ - ١١$

نقول إن مجموع معاملات الحدود الموجبة ١٦

ومجموع « » السالبة ٢١

فالفرق بين المجموعين ٥ والسالب الأكبر لحاصل الجمع المطلوب إذن  $-٥$

وإذا وجدت عدة كميات منفصلة بعضها عن بعض بالعلامتين  $٦ +$  - تبقى قيمتها ثابتة مهما تغير ترتيبها



ما قيمة كل من المصادر الآتية

- (١٧)  $- ٩س + ١١س + ٣س - ٤س =$  ؟
- (١٨)  $٣س - ١٨س + ٩س =$  ؟
- (١٩)  $٣س - ٧س - ٨س + ٢س = ١١س$  ؟
- (٢٠)  $٤س - ٥س - ٨س - ٧س = ١٦س$  ؟
- (٢١)  $٤س - ٧س + ١٥س - ٩س =$  ؟
- (٢٢)  $- ٩س - ٤س - ١٢س + ١٣س - ٧س = ١٩س$  ؟
- (٢٣)  $٧س - ١١س - ٤س - ١٤س + ١٢س =$  ؟
- (٢٤)  $\frac{1}{٣}س - \frac{1}{٣}س + س + \frac{1}{٣}س =$  ؟
- (٢٥)  $\frac{1}{٣}س + \frac{1}{٣}س - \frac{1}{٣}س =$  ؟
- (٢٦)  $- ٥س + \frac{1}{٣}س - ٢س + \frac{1}{٣}س + \frac{1}{٣}س =$  ؟
- (٢٧)  $- \frac{٥}{٣}س - ٢س - \frac{٢}{٣}س + س + \frac{1}{٣}س + \frac{1}{٣}س =$  ؟
- (٢٨)  $١س - \frac{1}{٣}س - \frac{1}{٣}س - \frac{1}{٣}س - \frac{1}{٣}س + ١س + ١س + \frac{٥}{١٣}س =$  ؟
- (٢٩)  $\frac{٢}{٣}س - \frac{٢}{٣}س + س - ٢س - \frac{1}{٣}س + س + س =$  ؟
- (٣٠)  $- \frac{٥}{٣}س - \frac{٢}{٣}س - \frac{٢}{٣}س - \frac{1}{٣}س - \frac{٢}{٣}س =$  ؟

## الباب الثالث - الأقواس البسيطة ، الجمع

بند ٢٠ - إذا ارتبطت جملة كيات حسابية بعلامتي + و - لا يتغير الحاصل مهما بدلتنا في مواضع تلك الكيات ، ويسرى هذا أيضا على الكيات الجبرية فالمقدار  $١ - ب + ج$  يساوي المقدار  $١ + ج - ب$  لأننا في الحالة الأولى نطرح ب من ١ ثم نضم ج إلى الباقي وفي الحالة الثانية نضم ج إلى ١ ثم نطرح ب من حاصل الجمع فالنتيجة يجب أن تكون واحدة في الحالتين وبالطريقة عينها يمكننا أن نثبت صحة ما قلناه بالنسبة لأي مقدار جبري آخر وعلى ذلك يمكن أن نكتب حدود أى مقدار جبري بأي ترتيب نشاء . فمثلا يمكننا كتابة  $١ - ب$  بالصورة  $١ + ب$  وكلتا الصورتين واحدة في القيمة

ولزيادة الايضاح نعرض (كما في بند ١٧) أن  $١$  تقل على مكسب قدره  $١$  من الجنيئات  $٦ - ب$  نذل على خسارة قدرها  $ب$  من الجنيئات فن البديهي أنه يستوى تقديم ما يدل على المكسب على ما يدل على الخسارة والعكس



بند ٢١ - القوسان ( ) يستعملان للدلالة على أن الحدود المحصورة بينهما تعتبر كمية واحدة وستأتي في الباب السابع بالشرح الوافي للاتقواس واستعمالها . أما هنا فنقتصر على البسيط منها

$٨ + (١٣ + ٥)$  معناه أن  $١٣ + ٥$  تجمعان ويضم حاصل جمعهما إلى  $٨$  وواضح أنه من الممكن أن نضيف إلى الثمانية  $١٣ + ٥$  كلا على أفرادها أو مجموعهما بدون أن يحدث تغيراً في النتيجة

$$\text{فعلى هذا يكون } ٨ + (١٣ + ٥) = ٨ + ١٣ + ٥ = ٢٦$$

وكذلك  $١ + (٥ + ٦) = ١ + ٥ + ٦$  حاصل جمع  $٥ + ٦$

$$\text{فيكون } ١ + (٥ + ٦) = ١ + ٥ + ٦$$

وكذلك  $٨ + (١٣ - ٥)$  معناه أن نضيف إلى  $٨$  فرق الخمسة من  $١٣$  فإذا أضفنا إلى الثمانية  $١٣$  كان الناتج أكبر من الحقيقة بمقداره فينبغي حيلته أن نطرح  $٥$  من هذا الناتج للحصول على الناتج الحقيقي

$$\text{فيكون } ٨ + (١٣ - ٥) = ٨ - ٥ + ١٣ = ١٦$$

وكذلك  $١ + (٦ - ٥) = ١ + ٦ - ٥$  معناه أن نضم إلى  $١$  فرق  $٦$  من  $٥$

$$\text{فيكون } ١ + (٦ - ٥) = ١ + ٦ - ٥ \quad (١)$$

$$\text{وأيضاً } ١ + ٦ - ٥ = (١ + ٦) - ٥ = ١ + ٦ - ٥ \quad (٢)$$

$$\text{وبالعكس } ١ + ٦ - ٥ = ١ + ٦ - ٥$$

$$(٣) \quad ١ + ٦ - ٥ = (١ + ٦) - ٥$$

$$\text{وأيضاً } ١ + ٦ - ٥ = ١ + ٦ - ٥ \quad [\text{بند ٢٠}]$$

$$= \text{حاصل جمع } ١ + ٦ - ٥$$

$$= \text{حاصل جمع } ١ + ٦ - ٥ \quad [\text{بند ٢٠}]$$

$$\text{فإن } ١ + ٦ - ٥ = (١ + ٦) - ٥ \quad (٤)$$

وبالتأمل في النتائج  $١ ٢ ٣ ٤$  نستنتج القاعدة الآتية

إذا سبقت علامة + مقدارا جبريا محصورا بين قوسين أمكن إزالة القوسين أو وضعهما بلا تغيير في المقدار

وبالعكس كل مقدار جبري يمكن حصره جزء منه بين قوسين مسبوق أولهما بعلامة + مع بقاء علامة كل حد واقع داخل القوسين على ما كانت عليه قبل الحصر

فإن يمكن كتابة المقدار الجبري  $١ + ٦ - ٥$  بأي الطرق الآتية

$$(١ + ٦ - ٥)$$

$$١ + (٦ - ٥)$$

٦

$$١ - (٥ - ٦)$$

٦

بند ٢٢ - المقدار الجبرى ١ - (ب + ح) معناه أن نطرح من أ حاصل جمع ب ح  
وباقى الطرح لا يتغير سواء طرحنا حاصل جمع ب ح من أ أو طرحنا أولا ب من أ ثم طرحنا  
ح من باقى الطرح

$$\text{فاذن } ١ - (ب + ح) = ١ - ب - ح$$

وأیضا ١ - (ب - ح) معناه أن نطرح من أ مقدار زیادة ب على ح فاذا طرحنا ب  
كلها من أ يكون الناتج وهو ١ - ب أقل من الحقيقة بمقدار ح فالحصول على باقى الطرح الحقيقى  
تجب إضافة ح الى ١ - ب

$$\text{فاذن } ١ - (ب - ح) = ١ - ب + ح$$

$$\text{وكذلك } ١ - ب - (ح - ز) = ١ - ب - ح + ز$$

ومن ذلك نستنتج القاعدة الآتية

إذا سبقت علامة - مقدارا جبريا محصورا بين قوسين أمكن إزالة القوسين أو رفعهما على شرط  
أن تغير علامة كل حد كان محصورا بين القوسين

وبالعكس كل مقدار جبرى يمكن حصره فى جزء منه بين قوسين مسبوق أولهما بعلامة (-) مع  
تغيير علامة كل حد داخل بين القوسين

فاذن يمكن كتابة المقدار الجبرى ١ - ب + ح + ز - هـ بأى الطرق الآتية

$$١ - (ب - ح - ز + هـ)$$

$$١ - ب - (ح - ز + هـ)$$

$$١ - ب + ح - (ز - هـ)$$

ومما سبق نستنتج ما يأتى

(أولا) عمليات الجمع والطرح تعمل على أى ترتيب كان

$$\text{مثلا } ١ - ب + ح - ز - هـ = ١ - ب + ح - ز - هـ$$

$$= ١ - ب - ز + ح - هـ$$

ويسمى هذا القانون بالقانون التبادلى للجمع والطرح

(ثانيا) يمكن وضع حدود أى مقدار جبرى من حيث ضم بعضها إلى بعض على أى كيفية كانت  
مثلا

$$١ + ب - ح - ز - هـ = ١ + (ب - ح) - ز - هـ$$

$$= ١ + (ب - ح) + (ز - هـ) - ز$$

$$= ١ + ب - ح - ز + هـ$$

ويسمى هذا القانون بقانون تنسيق الحدود للجمع والطرح

## جمع الحدود غير المتشابهة

بند ٢٣ - رأينا فيما تقدم أنه عند جمع عدة حدود متشابهة يكون حاصل الجمع حدًا يشابه تلك الحدود أما إذا كانت الحدود غير متشابهة فلا يمكن اختصارها فتتلا جمع  $a + b$  نقول بما أنها كبتان غير متشابهتين فكل ما يمكننا عمله أن نضع الكبتين مفصولتين أحدهما عن الأخرى بعلامة + ويقال إن حاصل جمعهما  $a + b$

وعلى حسب قواعد رفع الأقواس نجد أن  $a + (-b) = a - b$  أي أن حاصل الجمع الجبري للكبتين  $a - b$  يكتب هكذا  $a - b$  ومن هنا يتضح أن لكلمة حاصل جمع في الجبر معنى أوسع من مدلولها في الحساب ففي الحساب  $a - b$  لا معنى لها سوى طرح  $b$  من  $a$  أما في الجبر فتعتبر إما عملية طرح كما في الحساب أو عملية جمع كبتين أحدهما  $a$  والأخرى  $-b$  بقطع النظر عن كون  $b$  أكبر أو أصغر من  $a$

(مثال ١) ما حاصل جمع  $13 - 5 + 2 + 126 - 3 - 6 - 14 + 2$  حاصل الجمع

$$\begin{aligned} & (13 - 5 + 2) + (126 - 3 - 6 - 14 + 2) = \\ & 13 - 5 + 2 - 3 - 6 - 14 + 126 + 2 = \\ & 13 - 12 + 2 - 3 - 6 - 14 + 126 + 2 = \\ & 1 - 12 + 2 - 3 - 6 - 14 + 126 = \end{aligned}$$

ولكن يمكننا إجراء هذه العملية بطريقة أحسن من السابقة بمراعاة القاعدة الآتية قاصدة : رتب المقادير الجبرية في سطور بحيث يكون كل نوع من الحدود المتشابهة في عمود رأسي ثم اجمع الأعمدة الرأسية مبتدئًا من اليمين

$$\begin{array}{r} 13 - 5 + 2 \\ 126 - 3 - 6 - 14 + 2 \\ \hline 1 - 12 + 2 - 3 - 6 - 14 + 126 \end{array}$$

فاحصل الجمع الجبري للعمود الأول  $a$  وللثاني صفر أما الحدود المنفردة في العمودين الثالث والرابع فتوضع في الحاصل كما هي

$$\begin{array}{r} \text{(مثال ٢) اجمع } 15 - 6 + 17 - 13 + 12 - 6 \\ 15 - 6 + 17 - 13 + 12 - 6 \\ 17 - 6 + 15 - 13 + 12 - 6 \\ 17 - 6 + 15 - 13 + 12 - 6 \\ 17 - 6 + 15 - 13 + 12 - 6 \\ 17 - 6 + 15 - 13 + 12 - 6 \\ 17 - 6 + 15 - 13 + 12 - 6 \end{array}$$



بند ٢٤ - كل حرف من الحروف الداخلة في تركيب حد يسمى ركنًا له ودرجة الحد عند الحروف الداخلة فيه أى عدد أركانه

(مثلاً) يسمى  $1 \times 6$  حدًا ذا ثلاثة أركان أو حدًا من الدرجة الثالثة  $6 \times 1$  سُمي حدًا من الدرجة الخامسة أو حدًا ذا خمسة أركان  
ولا دخل للعاملات الرقبة في حساب درجة الحد وعدد أركانه فكل من  $1 \times 8$   $6 \times 2$   $8 \times 6$  حد من الدرجة السابعة

درجة المقدار الجبري هي درجة الحد الذي تكون درجته أكبر من درجة غيره من الحدود المكونة منها المقدار فدرجة المقدار  $4 - 3 + 2 - 1$  هي الرابعة أما المقدار  $5 - 4 + 3 - 2 + 1$  فدرجته الخامسة ويحسن أحيانا أن نعين درجة المقدار بالنسبة لحرف واحد من الحروف الداخلة فيه مثلا  $3 - 2 + 1 - 0$  يسمى مقدارا جبريا من الدرجة الثالثة بالنسبة إلى الحرف  $s$  يسمى المقدار الجبري المركب متجانسا إذا اتحدت حدوده في الدرجة مثلا  $4 - 3 + 2 - 1$  مقدار متجانس من الدرجة السادسة

بند ۲۵ - القوى المختلفة لحرف واحد تكون حدودا غير متشابهة فلا يمكن اختصارها فاجعل جمع  
 ۲ ۳ ۴ ۵ لا يمكن اختصاره في حد بل يلزم أن يكتب هكذا ۲ + ۳ ۴ ۵ ويترك كما هو  
 وكذلك حاصل الجمع الجبري المحدود ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰ ۱۰۱ ۱۰۲ ۱۰۳ ۱۰۴ ۱۰۵ ۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۸ ۱۰۹ ۱۱۰ ۱۱۱ ۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۴ ۱۱۵ ۱۱۶ ۱۱۷ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۰ ۱۲۱ ۱۲۲ ۱۲۳ ۱۲۴ ۱۲۵ ۱۲۶ ۱۲۷ ۱۲۸ ۱۲۹ ۱۳۰ ۱۳۱ ۱۳۲ ۱۳۳ ۱۳۴ ۱۳۵ ۱۳۶ ۱۳۷ ۱۳۸ ۱۳۹ ۱۴۰ ۱۴۱ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴ ۱۴۵ ۱۴۶ ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ ۱۵۰ ۱۵۱ ۱۵۲ ۱۵۳ ۱۵۴ ۱۵۵ ۱۵۶ ۱۵۷ ۱۵۸ ۱۵۹ ۱۶۰ ۱۶۱ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴ ۱۶۵ ۱۶۶ ۱۶۷ ۱۶۸ ۱۶۹ ۱۷۰ ۱۷۱ ۱۷۲ ۱۷۳ ۱۷۴ ۱۷۵ ۱۷۶ ۱۷۷ ۱۷۸ ۱۷۹ ۱۸۰ ۱۸۱ ۱۸۲ ۱۸۳ ۱۸۴ ۱۸۵ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸ ۱۸۹ ۱۹۰ ۱۹۱ ۱۹۲ ۱۹۳ ۱۹۴ ۱۹۵ ۱۹۶ ۱۹۷ ۱۹۸ ۱۹۹ ۲۰۰ ۲۰۱ ۲۰۲ ۲۰۳ ۲۰۴ ۲۰۵ ۲۰۶ ۲۰۷ ۲۰۸ ۲۰۹ ۲۱۰ ۲۱۱ ۲۱۲ ۲۱۳ ۲۱۴ ۲۱۵ ۲۱۶ ۲۱۷ ۲۱۸ ۲۱۹ ۲۲۰ ۲۲۱ ۲۲۲ ۲۲۳ ۲۲۴ ۲۲۵ ۲۲۶ ۲۲۷ ۲۲۸ ۲۲۹ ۲۳۰ ۲۳۱ ۲۳۲ ۲۳۳ ۲۳۴ ۲۳۵ ۲۳۶ ۲۳۷ ۲۳۸ ۲۳۹ ۲۴۰ ۲۴۱ ۲۴۲ ۲۴۳ ۲۴۴ ۲۴۵ ۲۴۶ ۲۴۷ ۲۴۸ ۲۴۹ ۲۵۰ ۲۵۱ ۲۵۲ ۲۵۳ ۲۵۴ ۲۵۵ ۲۵۶ ۲۵۷ ۲۵۸ ۲۵۹ ۲۶۰ ۲۶۱ ۲۶۲ ۲۶۳ ۲۶۴ ۲۶۵ ۲۶۶ ۲۶۷ ۲۶۸ ۲۶۹ ۲۷۰ ۲۷۱ ۲۷۲ ۲۷۳ ۲۷۴ ۲۷۵ ۲۷۶ ۲۷۷ ۲۷۸ ۲۷۹ ۲۸۰ ۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۳ ۲۸۴ ۲۸۵ ۲۸۶ ۲۸۷ ۲۸۸ ۲۸۹ ۲۹۰ ۲۹۱ ۲۹۲ ۲۹۳ ۲۹۴ ۲۹۵ ۲۹۶ ۲۹۷ ۲۹۸ ۲۹۹ ۳۰۰ ۳۰۱ ۳۰۲ ۳۰۳ ۳۰۴ ۳۰۵ ۳۰۶ ۳۰۷ ۳۰۸ ۳۰۹ ۳۱۰ ۳۱۱ ۳۱۲ ۳۱۳ ۳۱۴ ۳۱۵ ۳۱۶ ۳۱۷ ۳۱۸ ۳۱۹ ۳۲۰ ۳۲۱ ۳۲۲ ۳۲۳ ۳۲۴ ۳۲۵ ۳۲۶ ۳۲۷ ۳۲۸ ۳۲۹ ۳۳۰ ۳۳۱ ۳۳۲ ۳۳۳ ۳۳۴ ۳۳۵ ۳۳۶ ۳۳۷ ۳۳۸ ۳۳۹ ۳۴۰ ۳۴۱ ۳۴۲ ۳۴۳ ۳۴۴ ۳۴۵ ۳۴۶ ۳۴۷ ۳۴۸ ۳۴۹ ۳۵۰ ۳۵۱ ۳۵۲ ۳۵۳ ۳۵۴ ۳۵۵ ۳۵۶ ۳۵۷ ۳۵۸ ۳۵۹ ۳۶۰ ۳۶۱ ۳۶۲ ۳۶۳ ۳۶۴ ۳۶۵ ۳۶۶ ۳۶۷ ۳۶۸ ۳۶۹ ۳۷۰ ۳۷۱ ۳۷۲ ۳۷۳ ۳۷۴ ۳۷۵ ۳۷۶ ۳۷۷ ۳۷۸ ۳۷۹ ۳۸۰ ۳۸۱ ۳۸۲ ۳۸۳ ۳۸۴ ۳۸۵ ۳۸۶ ۳۸۷ ۳۸۸ ۳۸۹ ۳۹۰ ۳۹۱ ۳۹۲ ۳۹۳ ۳۹۴ ۳۹۵ ۳۹۶ ۳۹۷ ۳۹۸ ۳۹۹ ۴۰۰ ۴۰۱ ۴۰۲ ۴۰۳ ۴۰۴ ۴۰۵ ۴۰۶ ۴۰۷ ۴۰۸ ۴۰۹ ۴۱۰ ۴۱۱ ۴۱۲ ۴۱۳ ۴۱۴ ۴۱۵ ۴۱۶ ۴۱۷ ۴۱۸ ۴۱۹ ۴۲۰ ۴۲۱ ۴۲۲ ۴۲۳ ۴۲۴ ۴۲۵ ۴۲۶ ۴۲۷ ۴۲۸ ۴۲۹ ۴۳۰ ۴۳۱ ۴۳۲ ۴۳۳ ۴۳۴ ۴۳۵ ۴۳۶ ۴۳۷ ۴۳۸ ۴۳۹ ۴۴۰ ۴۴۱ ۴۴۲ ۴۴۳ ۴۴۴ ۴۴۵ ۴۴۶ ۴۴۷ ۴۴۸ ۴۴۹ ۴۵۰ ۴۵۱ ۴۵۲ ۴۵۳ ۴۵۴ ۴۵۵ ۴۵۶ ۴۵۷ ۴۵۸ ۴۵۹ ۴۶۰ ۴۶۱ ۴۶۲ ۴۶۳ ۴۶۴ ۴۶۵ ۴۶۶ ۴۶۷ ۴۶۸ ۴۶۹ ۴۷۰ ۴۷۱ ۴۷۲ ۴۷۳ ۴۷۴ ۴۷۵ ۴۷۶ ۴۷۷ ۴۷۸ ۴۷۹ ۴۸۰ ۴۸۱ ۴۸۲ ۴۸۳ ۴۸۴ ۴۸۵ ۴۸۶ ۴۸۷ ۴۸۸ ۴۸۹ ۴۹۰ ۴۹۱ ۴۹۲ ۴۹۳ ۴۹۴ ۴۹۵ ۴۹۶ ۴۹۷ ۴۹۸ ۴۹۹ ۵۰۰ ۵۰۱ ۵۰۲ ۵۰۳ ۵۰۴ ۵۰۵ ۵۰۶ ۵۰۷ ۵۰۸ ۵۰۹ ۵۱۰ ۵۱۱ ۵۱۲ ۵۱۳ ۵۱۴ ۵۱۵ ۵۱۶ ۵۱۷ ۵۱۸ ۵۱۹ ۵۲۰ ۵۲۱ ۵۲۲ ۵۲۳ ۵۲۴ ۵۲۵ ۵۲۶ ۵۲۷ ۵۲۸ ۵۲۹ ۵۳۰ ۵۳۱ ۵۳۲ ۵۳۳ ۵۳۴ ۵۳۵ ۵۳۶ ۵۳۷ ۵۳۸ ۵۳۹ ۵۴۰ ۵۴۱ ۵۴۲ ۵۴۳ ۵۴۴ ۵۴۵ ۵۴۶ ۵۴۷ ۵۴۸ ۵۴۹ ۵۵۰ ۵۵۱ ۵۵۲ ۵۵۳ ۵۵۴ ۵۵۵ ۵۵۶ ۵۵۷ ۵۵۸ ۵۵۹ ۵۶۰ ۵۶۱ ۵۶۲ ۵۶۳ ۵۶۴ ۵۶۵ ۵۶۶ ۵۶۷ ۵۶۸ ۵۶۹ ۵۷۰ ۵۷۱ ۵۷۲ ۵۷۳ ۵۷۴ ۵۷۵ ۵۷۶ ۵۷۷ ۵۷۸ ۵۷۹ ۵۸۰ ۵۸۱ ۵۸۲ ۵۸۳ ۵۸۴ ۵۸۵ ۵۸۶ ۵۸۷ ۵۸۸ ۵۸۹ ۵۹۰ ۵۹۱ ۵۹۲ ۵۹۳ ۵۹۴ ۵۹۵ ۵۹۶ ۵۹۷ ۵۹۸ ۵۹۹ ۶۰۰ ۶۰۱ ۶۰۲ ۶۰۳ ۶۰۴ ۶۰۵

يُمكن في جمع عدة مقادير جبرية مركبة من حدود متحدة في حرف ذي قوى مختلفة فيها أن ترتب تلك المقادير بالنسبة للقوى الصاعدة أو النازلة لذلك الحرف ولايضاح ذلك تأتي بالمثالين الآتيين

(مثال ۱)  $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$   
 $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$

$$\begin{array}{r} V + \sim V + \sim 0 - \sim V \\ A - \sim A - \sim V \\ \sim E + \sim V + \sim V - \\ \sim A - \sim V - \sim V \\ E + \sim + \sim - \sim - \\ V + \sim V - \sim V - \sim V \end{array}$$

فلكتابة أول مقدار نبدأ بالحدّ المشتمل على أكبر قوة للحرف  $\alpha$  ثم الحدّ الذي يليه في الدرجة بالنسبة لذلك الحرف عينه وهكذا إلى الحدّ الأخير الذي ليس فيه الحرف  $\alpha$  أصلاً . ثم نضع المقدّرات الجبرية الأخرى بالطريقة عينها بحيث يكون كل عمود عبارة عن الحدود المتصلة الحروف والأشياء معاً في الحدود المتشابهة

$$\begin{aligned} & \text{(مثال ٢) لجمع } ٢١٣ - ٤٢ + ٦٠٦ - ١٠١ - ٦٣ - ٦٨٦ + ٤٥ + ١٩٦ \\ & \quad ٤١ + ٦٢ - ١٩٦ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{٢١٣ - ٤٠} + \phantom{٤١} + \phantom{٦٢} + \phantom{١٩٦} \\ ٢١٣ - ٤٠ + ٤١ - \\ ٦٨ + \phantom{٤١} + \phantom{٦٢} + \phantom{١٩٦} \\ ٦٢ - ١٩٦ + ٤١ \\ \hline ٦٤ + ١٤ + ١٣ + ٣ \end{array}$$

يلاحظ هنا أن المقادير مكونة من قوى حرفين ١ ٦ ب فترتب المقادير على حسب القوى النازلة للحرف ب والقوى الصاعدة للحرف ١

### (تمارين ٣ ب)

ما حاصل جمع كل من المقادير الآتية

$$(١) \quad ١٢ + ١٣ + ١٦ + ٦ - ١٥ - ٢٢ + ١٥ - ١٣٦$$

$$(٢) \quad ٢٢ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(٣) \quad ١٣ - ١٧ - ٤ - ٦ - ١٦ + ١٩ - ١٣ - ٤٦ + ١١ + ١١ + ٥٦$$

$$(٤) \quad ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(٥) \quad ١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(٦) \quad ١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(٧) \quad ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(٨) \quad ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(٩) \quad ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(١٠) \quad ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(١١) \quad ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$

$$(١٢) \quad ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢$$



## الباب الرابع - الطرح

بند ٢٦ - شرحنا أبسط حالات الطرح فيما سبق تحت عنوان جمع الحدود المتشابهة التي بعضها سالب (راجع بند ١٨)

$$\begin{array}{rcl}
 ١٢ = ١٣ - ١٥ & \text{فن المعلوم أن} & \\
 ١٤ - = ١٧ - ١٣ & \text{وأن} & \\
 ١٩ - = ١٦ - ١٣ - & \text{وأن} & \\
 & \text{وعلمنا أيضا من قاعدة رفع الأقواس (بند ٢٢)} & \\
 ١٨ + ١٣ = (١٨ -) - ١٣ & \text{أن} & \\
 ١١١ = & & \\
 ١٨ + ١٣ - = (١٨ -) - ١٣ - & \text{وأن} & \\
 ١٥ = & &
 \end{array}$$

### طرح الحدود غير المتشابهة

بند ٢٧ - يتبين من المثال الآتي عملية طرح الحدود غير المتشابهة (مثال) لطرح ١٣ - ١٢ - ٥ من ١٤ - ٣ + ٥

$$\begin{array}{rcl}
 (١٤ - ٣ + ٥) - (١٣ - ١٢ - ٥) & \text{باقي الطرح} & \\
 ١٤ - ٣ + ٥ - ١٣ + ١٢ + ٥ = & & \\
 ١ + ٥ + ١٢ + ٥ - ٣ - ١٣ = & & \\
 ١٦ + ٥ - ٣ - ١٣ = & &
 \end{array}$$

يوضع المطروح بين قوسين مسبوق أولهما بعلامة - ثم يرفع القوسان وتضم الحدود المتشابهة بعضها إلى بعض بموجب القواعد المذكورة في بند (١٨) وأحسن من هذا أن نضع المطروح تحت المطروح منه بعد تغيير علامة كل حد في المطروح ثم نجمع كما سبق في مبحث الجمع هكذا

$$\begin{array}{r}
 ١٤ - ٣ + ٥ \\
 ١٣ - ١٢ - ٥ \\
 \hline
 ١٦ + ٥ - ٣ - ١٣
 \end{array}$$

نكتب الحدود المتشابهة في عمود رأسى ثم نجمع كل عمود على حده

قاعدة الطرح : تغيير علامة كل حد في المطروح ثم يجمع هو والمطروح منه

(ملاحظة) ليس من الضروري أن يكون تغيير علامات حدود المطروح بالكتابة دائما بل يحسن تغييرها عقليا



(مثال ١) اطرح

$$\begin{array}{r} ٢ \text{ سر}^٢ + ٨ \text{ سر} - ٧ \text{ سر}^٢ \text{ من } ٥ \text{ سر}^٢ + ٨ \text{ سر} - ٧ \text{ سر}^٢ \\ ٥ \text{ سر}^٢ + ٨ \text{ سر} - ٧ \text{ سر}^٢ \\ \hline ٢ \text{ سر}^٢ + ٨ \text{ سر} - ٧ \text{ سر}^٢ \\ ٣ \text{ سر}^٢ - ٧ \text{ سر} + ٧ \text{ سر}^٢ \end{array}$$

نبدأ من اليمين فنجمع عقليا ٥ سر<sup>٢</sup> - ٦ سر<sup>٢</sup> نحصل جمعها الجبري ٣ سر<sup>٢</sup> وكذلك الحال في العمود الثاني ويجب تغيير علامة الحد الأخير وهو - ٧ سر<sup>٢</sup> قبل وضعه في باقي الطرح

(مثال ٢) اطرح

$$٣ \text{ سر}^٢ - ٢ \text{ سر} - ١ \text{ سر}^٢$$

بما أن الحدود المشتملة على حرف واحد بقوى مختلفة حدود غير متشابهة فتوضع في أعمدة مختلفة هكذا

$$\begin{array}{r} ١ + \quad \quad \quad ٣ \text{ سر}^٢ - \\ \quad \quad \quad ٣ \text{ سر}^٢ - ٢ \text{ سر} \\ \hline ١ + ٣ \text{ سر}^٢ + ٢ \text{ سر} - ٣ \text{ سر}^٢ \end{array}$$

وعب أن المطروح خلو من الحدود في العمودين الأول والأخير نضع في الباقي حدى المطروح منه في هذين العمودين بدون تغيير علامتهما

أما حدى المطروح في العمودين الثاني والثالث فيجب تغيير علامة كل منهما

وليس من الضروري أن يتكلى في وضع حدود المطروح منه وإنما يحسن التبديل لكي يصير الباقي مرتباً على حسب القوى النازلة للحرف سر

(تمارين ١٤)

اطرح

- (١) ١٤ - ٣ + ٥ من ١٢ - ٣ - ٥
- (٢) ١ - ٣ + ٥ من ١٤ - ٨ - ٥
- (٣) ٢ - ٨ - ٥ + ٥ من ١٥ - ١٠ - ١٨ ع
- (٤) ١٥ - ٢٧ - ٨ + ٥ من ١٠ + ٣ + ٤
- (٥) ١٠ - ٨ - ١٤ + ١٥ ع من ٨ - ٥ - ٥
- (٦) ١١ - ٦ + ٥ من ١٠ - ١ - ٤ ع
- (٧) ١٤ - ٣ + ١٥ من ١٥ - ١٦ - ١٨
- (٨) ١٦ - ٨ - ١٨ - ١٥ ع من ٥ - ٨ - ٧ ع
- (٩) ١ - ١ - ١ - ١ من ١ - ١ - ١ + ١
- (١٠) ١ - ١ - ١ - ١ من ١ - ١ - ١ + ١



$$13) \quad 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5050$$

$$v^2 - v^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 = \frac{3}{2}v^2$$

(١٥)  $٧ + ٢ - ٨ - ٥$  من  $٣ - ٥ + ٥ + ٤$

$$r_2 - r_0 + \eta_3 - \omega_1 \gamma \text{ من } \omega_1 \beta - r_2 + r_0 + \eta_1 \quad (iv)$$

$$x^2 - x + 1 - x^2 = x^2 - x - x^2 + x - 1. \quad (17)$$

$$9V + V - 70 - 7 \text{ من } 1 + 93 + 78 - 9V \quad (18)$$

$$217 - 216 - 10 = 218 - 218 + 10. \quad (19)$$

$$2 + 2^4 10 + 2^4 18 - \text{من } 2^4 7 - 2^4 18 + 2 - 2^4 (20)$$

(٢١) من  $\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{4}r^2$  اطرح

(٢٢) من  $\frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{3} = 1$  اطرح  $1 - 1 \div \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

(۲۳) من  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$  اطرح  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{3}$

(٢٤) من  $\frac{2}{8}$  -  $\frac{1}{4}$  =  $\frac{1}{4}$  اطرح  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{4}$  =  $\frac{0}{4}$  = ٠

(٢٥) من  $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$  -  $\frac{2}{3}$  اطرح  $\frac{5}{12}$  -  $\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$  -  $\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

(٢٦) من  $\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  اطرح  $\frac{1}{4}$  من  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

أسئلة متنوعة (١)

(ف) اختصر

$$(1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$(u_1 - 10) - (1 + u_3) - u_2 - 13(r)$$

(٢) ضم الى حاصل جمع ١٢ - ٣ - ٢ = ٦ - ٢ + ١ = حاصل جمع ١ - ٤

(٣) إذا كانت  $س = ٣$   $٦$   $ص = ٢$   $٦$   $ع = ٤$  صفرا فما قيمة

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\epsilon_0}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon} (2$$

(٤) عرف الأس والمعامل — ما حاصل بهم الأسس والمعاملات كل على حدته في المقادير الجبرية الآتية

$$4 + 2 = 6 \quad 6 + 2 = 8 \quad 8 + 2 = 10$$



(٢٣) إجمع ١٥ - ٧ + ٦ على ٣ - ١٩ واطرح حاصل الجمع من ٤ - ٥

(٢٤) إذا كانت  $٣ = ٦$  صر  $٤ = ٦$  ك  $٨ = ٦$   $١٠ = ٥$

فما قيمة صر صر ك +  $\frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٣}$  + ٥

(٢٥) إذا كانت صر تقل على السنة العاشرة بعد الميلاد فما معنى ٣ - صر

(٢٦) ضم ٣ - صر - ٧ صر + ٥ إلى ٢ صر + ٥ صر - ٣ وأقص ٣ صر + ٢ من حاصل الجمع

(٢٧) بين الحدود المتشابهة والحدود المتجانسة في المقدار الجبري الآتي ثم اذكر درجته

٤ أ ٢ - ٢ + ٣ أ ٢ + ٥ - ١ أ ٢ صر + ٢ صر ١ أ + ١ أ صر - ١ أ ٢

(٢٨) بين جبريا مقدار زيادة حاصل جمع ١ ٦ ب على باقي طرح ٥ م ح

(٢٩) رجل سار من نقطة ثابتة (و) فشي ١٢ - ب من الكيلومترات شمالا ثم مشى ١٣ + ٢ ب من الكيلومترات جنوبا فما موضعه الأخير بالنسبة لنقطة و

(٣٠) ما المقدار الجبري الذي إذا أضيف إلى ٥ صر - ٧ صر + ٢ كان الناتج ٧ صر - ١

## الباب الخامس - الضرب

بند ٢٨ - الضرب في الأصل معناه تكرار عملية الجمع

فمثلا  $٣ \times ٤ = ٣$  مكررة ٤ مرات

$$٣ + ٣ + ٣ + ٣ =$$

تري أن المضروب فيه في هذا المثال يحتوي على أربع وحدات وأن عدد مرات تكرار الثلاثة هو عدد الوحدات الموجودة في ٤ فكنك  $١ \times ٣ = ٣$  مكررة مرات قدرها ب

$$١ + ١ + ١ + ١ + ١ = \text{وعدد الحدود} = ٥$$

ومسبق لنا أيضا أن  $٣ \times ٤ = ٤ \times ٣$  ومن السهل إثبات أن  $١ \times ٣ = ٣ \times ١$  ما دام كل من ١ ٦ ب رمزا لعدد صحيح موجب

بند ٢٩ - إذا لم يكن كل من المضروب والمضروب فيه عددا صحيحا موجبا يمكننا أن نعترف الضرب بأنه عملية تجري في كمية بحيث لو أجريت في الواحد لتنتج الكمية الأخرى ولييان ذلك نمثل بضرب  $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥}$  فنقول لضرب  $\frac{٢}{٣}$  في  $\frac{٤}{٥}$  نجري في الكمية  $\frac{٢}{٣}$  العملية التي لو أجريناها في الواحد لتنتج  $\frac{٤}{٥}$  أى نقسم  $\frac{٢}{٣}$  إلى سبعة أجزاء متساوية وتأخذ ثلاثة منها فكل جزء من سبعة الأجزاء المتساوية يساوي  $\frac{٢}{٣ \times ٥}$  ونتيجة أخذ ثلاثة منها تبين هكذا

$$\frac{٢ \times ٤}{٣ \times ٥} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥}$$

فأذن

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{5 \times 7} = \frac{3 \times 4}{7 \times 5} \quad \text{ونرى على مقتضى بند ٢٨ أن}$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{5}$$

نستنتج من ذلك أن حاصل الضرب لا يتغير بتغيير موضع العوامل سواء كانت تلك العوامل أعدادا صحيحة أو كسورا أى أن  $١ \times ٥ = ٥ \times ١$  سواء كان  $٥$  عددان صحيحين موجبين أو كسرين موجبين

على نحو ما تقدم يتضح بسهولة أن

$$٥ \times ١ \times ١ = ٥ \times ١$$

$$٥ \times ١ = ٥ \times (١ \times ١) = ٥ \times (١ \times ١) =$$

$$١ \times ٥ = ١ \times ٥ \times ١ = (٥ \times ١) \times ١ =$$

ومعنى كل ذلك أن عوامل أى حاصل ضرب يمكن وضعها بأى ترتيب ثا وهذا ما يعبر عنه بالقانون التبادلى للضرب

$$٥ \times ١ \times ١ = ٥ \times ١ \times ١ \times ٢ \times ٣ = ٥ \times ١ \times ٢ \times ١ \times ٣$$

بند ٣٠ - يمكن تنسيق عوامل أى حاصل ضرب بأى كيفية

$$٥ \times ١ \times ١ \times ٢ \times ٣ = ٥ \times ١ \times ٢ \times ٣ \times ١$$

$$(٥ \times ١) \times (١ \times ٢) \times ٣ =$$

$$٥ \times (١ \times ٢) \times ١ =$$

$$(٥ \times ١) \times ١ =$$

وهذا ما يعبر عنه بقانون تنسيق عوامل الضرب

بند ٣١ - بما أن  $١^٢ = ١ \times ١ = ١ \times ١ \times ١ = ١ \times ١ \times ١ \times ١ \times ١$  كما سبق بيانه في تعريف القوة

$$\therefore ١^٢ \times ١^٢ = ١^٤ = ١ \times ١ \times ١ \times ١ = ١^٤ = ١ \times ١ \times ١ \times ١ \times ١ \times ١$$

في حاصل الضرب هو مجموع أسسه في عوامل حاصل الضرب ويسمى هذا القانون بقانون الأسس للضرب

$$١^٢ \times ١^٢ = ١^٤ = ١ \times ١ \times ١ \times ١$$

$$\therefore ١^٢ \times ١^٢ = ١^٤ = ١ \times ١ \times ١ \times ١$$

وفي حالة ما إذا كانت المضروب والمضروب فيه يشتملان على عدة حروف ذات قوى مختلفة يتبع في عملية الضرب الطريقة السابقة

$$\text{مثلا } ١٠٠ \times ١٠٠ \times ١٠٠ = ١٠٠ \times ١٠٠ \times ١٠٠ = ١٠٠ \times ١٠٠ \times ١٠٠ = ١٠٠ \times ١٠٠ \times ١٠٠$$

(ملاحظة) على المبتدئ أن يلاحظ أنه في عملية الضرب هذه لا يمكن خلط قوى حرف بقوى حرف آخر فالتقدير الجبرى  $١٠٠ \times ١٠٠$  لا يمكن وضعه بشكل أبسط



(تمارين ١٥)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

- |                               |                     |
|-------------------------------|---------------------|
| (١٣) $٣٢ \times ٢٥ \times ٢٠$ | (١) $٥٠ \times ٧٠$  |
| (١٤) $٢٤ \times ٧٠ \times ٢٠$ | (٢) $٩٠ \times ٢٠$  |
| (١٥) $٢٥ \times ٨٠ \times ٢٠$ | (٣) $٢٨ \times ١٧$  |
| (١٦) $٥٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (٤) $٦٠ \times ٥٠$  |
| (١٧) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (٥) $٢٨ \times ٢٠$  |
| (١٨) $٣٢ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (٦) $٢٨ \times ٢٠$  |
| (١٩) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (٧) $٢٨ \times ٢٠$  |
| (٢٠) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (٨) $٢٨ \times ٢٠$  |
| (٢١) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (٩) $٢٨ \times ٢٠$  |
| (٢٢) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (١٠) $٢٨ \times ٢٠$ |
| (٢٣) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (١١) $٢٨ \times ٢٠$ |
| (٢٤) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ | (١٢) $٢٨ \times ٢٠$ |
| (٢٥) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ |                     |
| (٢٦) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ |                     |
| (٢٧) $٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$ |                     |

ضرب المقادير الجبرية المركبة بعضها في بعض

بند ٣٤ - إذا وضعنا في النتيجة ١ بند ٣٣ المقدار  $٢ + ٣$  بدلا من  $١$  نجد أن

$$\begin{aligned} (٢ + ٣) &= (٢ + ٣) + (٢ + ٣) \\ (٢ + ٣) &= (٢ + ٣) + (٢ + ٣) + (٢ + ٣) \\ (٢ + ٣) &= (٢ + ٣) + (٢ + ٣) + (٢ + ٣) + (٢ + ٣) \end{aligned}$$

ونستنتج من النتيجة (٢) أن

$$\begin{aligned} (٢ + ٣) &= (٢ + ٣) + (٢ + ٣) \\ (٢ + ٣) &= (٢ + ٣) + (٢ + ٣) \\ (٢ + ٣) &= (٢ + ٣) + (٢ + ٣) + (٢ + ٣) \\ (٢ + ٣) &= (٢ + ٣) + (٢ + ٣) + (٢ + ٣) + (٢ + ٣) \end{aligned}$$



وكذا إذا وضعنا  $c - s$  بدل  $m$  في النتيجة (١)

$$\text{نجد أن } (c - s)(b + 1) = (s - c)a + (s - c)b$$

$$= (s - c)(a + b)$$

$$(5) \dots \dots \dots 1 - c - s + a + b =$$

ونستنتج أيضا من النتيجة (٢) أن

$$(b - 1)(c - s) = (s - c)a - (s - c)b$$

$$= (s - c)(a - b)$$

$$= (s - c)(a - b) - (s - c)a + (s - c)b$$

$$(6) \dots \dots \dots 1 - c - s + a + b =$$

وبالتأمل في الطرف الأيسر من النتيجة (٦) وكيف نتج كل حد من حدودها

$$\text{نرى أن } 1 + = (1 +) \times (1 +)$$

$$s + = (s -) \times (b -)$$

$$c - = (c +) \times (b -)$$

$$s - = (s -) \times (1 +)$$

ومن الأمثلة المتقدمة نستخلص قانون العلامات في الضرب وهو

### قانون العلامات

حاصل ضرب حدين مسبوقين بعلامتين من نوع واحد موجب وحاصل ضرب حدين مسبوقين بعلامتين مختلفتين سالب

بند ٣٥ - قد يلاقى المبتدئ بعض الصعوبة في استعمال قانون العلامات سيما إذا كان المضروب فيه سالبا فلزيادة الإيضاح تأتي بأمثلة حسابية يظهر منها معنى الضرب في كمية سالبة

لضرب ٣ في - ٤ يلزم أن نجري في ٣ العملية التي لو أجريناها في الواحد لنتج - ٤ ومعلوم أن - ٤ تدل على أن الواحد كرر ٤ مرات وجعلت النتيجة سالبة . وإذن  $3 \times (-4) = -12$  تدل على أن ٣ كررت ٤ مرات وجعلت النتيجة سالبة و ٣ مكررة ٤ مرات  $12 + =$

$$\therefore 12 - = (-4) \times 3$$

وكذا  $3 \times -4 = -12$  تدل على أن ٣ كررت ٤ مرات ثم غيرت العلامة

فالعملية الأولى نتج - ١٢ والثانية نتج ١٢ +

$$\text{فيكون } 12 + = (-4) \times (-3)$$

ونستخلص من هذا أن الضرب في كمية سالبة يعبرى كما لو كان في كمية موجبة ثم تغير علامة حاصل الضرب



$(٧) - ٢٠$	$(١٢) ٢٠٢$	$(١٧) - ٢٠٢$
$(٨) ٢٠٢$	$(١٣) ٢٠٢$	$(١٨) - ٢٠٢$
$(٩) ٢٠٢$	$(١٤) - ٢٠٢$	$(١٩) ٢٠٢$
$(١٠) ٢٠٢$	$(١٥) - ٢٠٢$	$(٢٠) ٢٠٢$
$(١١) - ٢٠٢$	$(١٦) ٢٠٢$	

إذا كانت  $١ = ٤ - ٦ = ٣ - ٦ = ١ - ٦ = ٦ - ٤$  ضفرا  $٦ = ٤$   
 $٦ = ١$  فما قيمة كل من المقادير الآتية

$(٢٤) ٢٠٢ - ٢٠٢$	$(٢١) ٢٠٢ + ٢٠٢$
$(٢٥) ٢٠٢ - ٢٠٢$	$(٢٢) ٢٠٢ + ٢٠٢$
$(٢٦) ٢٠٢ - ٢٠٢$	$(٢٣) ٢٠٢ - ٢٠٢$

$$(٢٧) ٢٠٢ + ٢٠٢$$

$$(٢٨) ٢٠٢ - ٢٠٢$$

$$(٢٩) ٢٠٢ + ٢٠٢$$

$$(٣٠) ٢٠٢ - ٢٠٢$$

بند ٣٨ - الأمثلة الآتية تبين قاعدة العلامات وقانون الأسس على وجه أوضح

(مثال ١) لضرب  $١٤$  في  $٣$

نقول إن حاصل الضرب سالب كما يؤخذ من قاعدة العلامات ومعلوم  $١٤ \times ٣ = ١٢$

$$١٢ = (٣ -) \times ١٤$$

(مثال ٢) لضرب  $١٥$  في  $١٠$

نقول إن القيمة المطلقة لحاصل الضرب هي  $١٥ \times ١٠$  وعلى مقتضى قاعدة العلامات يجب أن يكون حاصل الضرب موجبا

$$\therefore (١٥ -) \times (١٠ -) = ١٥٠$$

(مثال ٣) ما حاصل الضرب المتسلسل للمقادير الجبرية  $١٢ \times ٦ \times ٢٠$

$$\text{لذلك نقول إن } ١٢ \times (٢٠ -) = ٢٤٠$$

$$٢٤٠ \times (٦ -) = (١٢ -) \times ٢٤٠$$

يمكن وضع الجواب المطلوب على التورلان  $١٢ \times ٦ \times ٢٠ = ١٢ \times ١٢٠$  وعلى حسب قاعدة العلامات يجب أن يكون حاصل الضرب المطلوب موجبا

(مثال ٤) لضرب  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$  في  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

نقول إن الحاصل المطلوب هو حاصل الجمع الجبري لحواصل الضرب الجزئية التي تتكون حسبما جاء بيئد ٣٧ فيكون

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

(تمارين ٥٥)

اضرب

- |   |  |
|---|--|
| (١) $\frac{1}{2}$ في $\frac{1}{3}$  | (٥) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |
| (٢) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$  | (٦) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |
| (٣) $\frac{1}{2}$ في $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$  | (٧) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ |
| (٤) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$                              | (٨) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ |
| (٩) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$                              |  |
| (١٠) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$   |  |
| (١١) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$                             |  |
| (١٢) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$               |  |
| (١٣) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |
| (١٤) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |
| (١٥) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |
| (١٦) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |
| (١٧) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |
| (١٨) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |
| (١٩) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |
| (٢٠) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |  |

ماحصل ضرب

- |   |   |
|---|---|
| (٢١) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ | (٢٥) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |
| (٢٢) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ | (٢٦) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |
| (٢٣) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ | (٢٧) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |
| (٢٤) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ | (٢٨) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ |

بند ٣٩ - ما قبل في البند ٣٣ يسرى على الأحوال التي يكون فيها كل من المضروب والمضروب فيه مشتملا على أكثر من حدٍّ

$$\text{مثلا} \quad (١ - ب + ج) م = م - ب م + ج م$$

فاذا وضعنا بدل م الكمية (س - ص) نجد أن

$$(١ - ب + ج) (س - ص) = (س - ص) م - (س - ص) ب م + (س - ص) ج م$$

$$= (س م - ص م) - (ب س م - ب ص م) + (ج س م - ج ص م)$$

$$= س م - ص م - ب س م + ب ص م + ج س م - ج ص م$$

وبناء على ما تقدم يمكننا أن نضع قاعدة ضرب المقدار الجبري المركب في مثله على الوجه الآتي  
قاعدة : تضرب كل حدٍّ من حدود المضروب في كل حدٍّ من حدود المضروب فيه ، وإذا كان الحدان المضروبان مسبوقين بعلامتين متحدين فعلاية حاصل ضربهما تكون + وإذا كانت علامتان مختلفتين فعلاية الحاصل تكون - وحاصل الجمع الجبري لحواصل الضرب الجزئية الناتجة على هذه الكيفية هو حاصل الضرب المطلوب ويسمى هذا العمل في الجبر توزيع الحاصل

بند ٤٠ - يلزمني أن يلاحظ أن أبسط شكل لحاصل ضرب المقدار  $١ + ب$  في المقدار  $س - ص$  هو  $(١ + ب) (س - ص)$  والإقواس هنا تمل على أن  $(١ + ب)$  المعتبرة كمية واحدة تضرب في  $(س - ص)$  المعتبرة كمية واحدة أيضا وعلى مقتضى القاعدة المتقدمة حاصل ضرب  $(١ + ب)$  في  $(س - ص)$  هو المجموع الجبري للحواصل الجزئية  $١ س + ب ص - ص - ب ص$  وقد وضعت علامة كل حاصل بمراعاة ما جاء في قانون العلامات

$$\text{(مثال ١) لضرب} \quad س - ص \text{ في } ١ + ب$$

$$\text{قول إن الحاصل} \quad = (س - ص) (١ + ب)$$

$$= س - ص + س ب - ص ب$$

$$= س + س ب - ص - ص ب$$

والأجسن أن ترتيب العملية كما يأتي

$$س +$$

$$س ب +$$

$$\hline س -$$

$$س ب -$$

$$\hline س + س ب - ص - ص ب$$

نبدأ من اليمين ونضع أول حاصل من حواصل الصف الثاني تحت الحد الثاني من الصف الأول لتكون الحدود المتشابهة في عمود رأسي ثم نجمع الحدود المتشابهة

(مثال ٢) لضرب ٢ سم - ٣ سم في ٤ سم - ٧ سم نجري العمل هكذا

$$\begin{array}{r}
 ٢ \text{ سم} - ٣ \text{ سم} \\
 ٤ \text{ سم} - ٧ \text{ سم} \\
 \hline
 ٨ \text{ سم} - ١٢ \text{ سم} \\
 ١٤ \text{ سم} - ٢١ \text{ سم} \\
 \hline
 ٨ \text{ سم} - ٢٦ \text{ سم} + ٢١ \text{ سم}
 \end{array}$$

(تمارين ٥٥)

ما حاصل ضرب

(٢١) ٢ سم - ٣ سم + ٨ سم	(١) ٥ سم + ١٠ سم
(٢٢) ٢ سم + ٣ سم - ٨ سم	(٢) ٥ سم + ٥ سم - ٦ سم
(٢٣) ٥ سم - ٢ سم - ١ سم	(٣) ٧ سم - ٦ سم - ١٠ سم
(٢٤) ٢ سم - ٥ سم - ١ سم	(٤) ٧ سم - ٦ سم + ١٠ سم
(٢٥) ٣ سم - ٥ سم + ٧ سم	(٥) ٧ سم + ٦ سم - ١٠ سم
(٢٦) ٣ سم + ٥ سم - ٧ سم	(٦) ٧ سم + ٦ سم + ١٠ سم
(٢٧) ٥ سم - ٦ سم + ٢ سم	(٧) ٦ سم + ٦ سم - ٦ سم
(٢٨) ٥ سم + ٦ سم - ٢ سم	(٨) ٨ سم - ٦ سم - ٤ سم
(٢٩) ٣ سم - ٥ سم + ٢ سم	(٩) ١٢ سم - ٦ سم - ١ سم
(٣٠) ٣ سم - ٥ سم + ٢ سم	(١٠) ١٢ سم + ٦ سم - ١ سم
(٣١) ١ سم - ٢ سم + ٦ سم	(١١) ١٥ سم - ٦ سم + ١٥ سم
(٣٢) ١ سم - ٧ سم + ٦ سم	(١٢) ١٥ سم - ٦ سم + ٣ سم
(٣٣) ١ سم - ٦ سم + ٨ سم	(١٣) ٢ سم - ٦ سم - ٣ سم
(٣٤) ١ سم - ٩ سم + ٥ سم	(١٤) ٧ سم + ٦ سم - ٧ سم
(٣٥) ١ سم + ٦ سم - ٥ سم	(١٥) ٥ سم + ٦ سم - ٥ سم
(٣٦) ١ سم - ٦ سم + ٥ سم	(١٦) ١٣ سم - ٦ سم + ١٤ سم
(٣٧) ١ سم - ١٢ سم + ٣ سم	(١٧) ١٧ سم - ٦ سم + ١٨ سم
(٣٨) ١ سم - ١٦ سم + ١ سم	(١٨) ١٩ سم + ٦ سم - ٢٠ سم
(٣٩) ١ سم - ١٦ سم + ١٦ سم	(١٩) ١٦ سم - ٦ سم + ١٦ سم
(٤٠) ٢ سم - ٢٦ سم + ٢٣ سم	(٢٠) ٢١ سم + ٦ سم - ٢١ سم

بند ٤١ - لثأت الآن بأمثلة أصعب من المتقدمة

(مثال ١) ما حاصل ضرب  $٣س٢ - ٢س - ٥$  -  $٦س٢ - ٢س - ٥$  -

$$\begin{array}{r}
 ٣س٢ - ٢س - ٥ \\
 ٦س٢ - ٢س - ٥ \\
 \hline
 ١٨س٢ - ٤س - ١٠س - ١٠س - ١٠س - ٢٥ \\
 ١٨س٢ - ١٤س - ٢٥
 \end{array}$$

يضرب كل حد من المقدار الأول في ٢س - وهو أول حد من المقدار الثاني ثم يضرب كل حد من المقدار الأول في - ٥ ويوضع كل نوع من الحدود المتشابهة في عمود رأسى ثم تجمع النواتج

(مثال ٢) ما حاصل ضرب  $١ - ٣ + ٦ + ٢$  -  $١ - ٣ + ٦ + ٢$  -

$$\begin{array}{r}
 ١ - ٣ + ٦ + ٢ \\
 ١ - ٣ + ٦ + ٢ \\
 \hline
 ١ - ٣ + ٦ + ٢ - ١ + ٣ - ٦ - ٢ \\
 ١ - ٣ + ٦ + ٢ - ١ + ٣ - ٦ - ٢
 \end{array}$$

بند ٤٢ - حينما تكون المعاملات كسورا نضع فيها القاعدة المعتادة في الضرب ثم نجعل المعاملات الكسرية بالطريقة الحسابية

(مثال ١) لضرب  $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}$  في  $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}$  ب

نجرى العمل كما يأتى

$$\begin{array}{r}
 \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} \\
 \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} \\
 \hline
 \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} \\
 \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}
 \end{array}$$

بند ٤٣ - إذا لم تكن المقادير مرتبة حسب القوى الصاعدة أو النازلة لحرف مشترك يحسن ترتيبها قبل الشروع في العمل

(مثال ١) ما حاصل ضرب ٢ ٩ + ٤ - ٤ - ١٣ في ١٣ - ١٥ - ٤ + ٤

$$\begin{array}{r}
 ٢ \quad ٩ + ١٣ - ٤ + ٤ \\
 - ١٥ - ١٣ + ٤ + ٤ \\
 \hline
 ١٠ - ١٥ + ١٣ - ٤ + ٤ \\
 ١٠ - ١٥ + ١٣ - ٤ + ٤ \\
 ١٠ - ١٥ + ١٣ - ٤ + ٤ \\
 \hline
 ١٠ - ١٥ + ١٣ - ٤ + ٤ \\
 ١٠ - ١٥ + ١٣ - ٤ + ٤ \\
 \hline
 ١٠ - ١٥ + ١٣ - ٤ + ٤
 \end{array}$$

ليس الترتيب شرطاً ضرورياً في الحل وإنما يسهل اختصار الحدود المتشابهة إذا روعي الترتيب قبل المضي في العمل

(مثال ٢) ما حاصل ضرب ٢ صه - ع - ٢ + ٢ - ٣ صه ع + صه في صه - ع ٢ + ع

$$\begin{array}{r}
 ٢ \text{ صه} - ع - ٢ + ٢ - ٣ \text{ صه} \text{ ع} + \text{صه} \\
 - ع ٢ + ع \\
 \hline
 ٢ \text{ صه} - ع - ٢ + ٢ - ٣ \text{ صه} \text{ ع} + \text{صه} \\
 - ع ٢ + ع \\
 \hline
 ٢ \text{ صه} - ع - ٢ + ٢ - ٣ \text{ صه} \text{ ع} + \text{صه} \\
 - ع ٢ + ع \\
 \hline
 ٢ \text{ صه} - ع - ٢ + ٢ - ٣ \text{ صه} \text{ ع} + \text{صه} \\
 - ع ٢ + ع
 \end{array}$$

(تمارين ٥ هـ)

اضرب

- (١) ١ + ١ + ١ في ١ - ١ - ١
- (٢) ١ - ١ + ١ في ١ + ١ - ١
- (٣) ١ - ١ + ١ في ١ + ١ + ١
- (٤) ٢ + ٢ في ٢ + ٢
- (٥) ٢ - ٢ + ٢ في ٢ + ٢
- (٦) ٢ - ٢ + ٢ في ٢ + ٢
- (٧) ٢ + ٢ في ٢ + ٢
- (٨) ٢ - ٢ + ٢ في ٢ + ٢
- (٩) ١٦ + ١٢ + ١٠ في ١٤ - ١٢



- (١٠)  $٤س - ١س + ٢س - ٣س$  في  $١ + س$
- (١١)  $س + س - ٢س$  في  $٢س + س - ٦$
- (١٢)  $٢س - ٣س + ٢س + ٢س$  في  $٢س + ٣س + ٢س$
- (١٣)  $- ٩ + ٩ - ٩ + ٩$  في  $١ - ١ - ١$
- (١٤)  $س - ٧س + ٥س$  في  $٢س - ٢س + ٣س$
- (١٥)  $٩ + ٩ + ٩ + ٩$  في  $٩ - ١٢ + ١٢ + ٢$
- (١٦)  $٤س + ٦س - ٩س$  في  $٢س - ٣س - ٤س$
- (١٧)  $س - ٣س - ٤س$  في  $س + س + س$
- (١٨)  $١ - ١ + ١ + ١$  في  $٩ + ٩ + ٩$
- (١٩)  $س - ٢س - ٢س + ٢س$  في  $س + ٢س + ٢س + ٢س$
- (٢٠)  $١ + ١ + ١ + ١$  في  $١ + ١ + ١ + ١$
- (٢١)  $- ٣ + ٣ + ٣ + ٣$  في  $١٥ + ١٥ + ١٥ + ١٥$
- (٢٢)  $٢٧س - ٣٦س + ٤٨س - ٦٤س$  في  $٣س + ٤س + ٤س + ٤س$
- (٢٣)  $٩ - ١٥ - ١٥ + ٩$  في  $١٥ + ١٥ + ١٥ + ١٥$
- (٢٤)  $س - س - س + س + س + س$  في  $١ + س + س + س + س + س$
- (٢٥)  $٩ + ٩ + ٩ - ٩ - ٩ - ٩$  في  $١ + ١ + ١ + ١ + ١ + ١$
- (٢٦)  $- س - س + س + س + س - س - س - س$  في  $س + س + س + س + س + س$
- (٢٧)  $س - س - س + س + س - س - س - س$  في  $س + س + س + س + س + س$
- (٢٨)  $٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣$  في  $٩ + ٩ + ٩ + ٩ + ٩ + ٩$
- (٢٩)  $١س + ٣س - ١س - ١س$  في  $١س - ١س - ١س - ١س$
- (٣٠)  $- ٢س - ٢س + ٢س + ٢س - ٢س - ٢س$  في  $٢س + ٢س + ٢س + ٢س$
- (٣١)  $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}$  في  $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}$
- (٣٢)  $\frac{١}{٣} - ٢س + \frac{٢}{٣}$  في  $\frac{٢}{٣} + س + \frac{١}{٣}$
- (٣٣)  $\frac{٢}{٣} + س + س + \frac{٢}{٣}$  في  $\frac{٢}{٣} - س - \frac{١}{٣}$
- (٣٤)  $\frac{٢}{٣} - ١س - \frac{٢}{٣}$  في  $\frac{٢}{٣} - س - \frac{١}{٣} + ١س + \frac{١}{٣}$
- (٣٥)  $\frac{١}{٣} - س - \frac{٢}{٣}$  في  $\frac{٢}{٣} - س + \frac{١}{٣} + س - \frac{٢}{٣}$
- (٣٦)  $\frac{٢}{٣} + ١س + س + \frac{٢}{٣}$  في  $\frac{١}{٣} - س + \frac{٢}{٣} + س - \frac{١}{٣}$

بند ٤٤ - كتابة حواصل الضرب بمجرد النظر

إنه وإن كان من الممكن دائماً إيجاد حاصل ضرب مقدارين جبريين من ذوات الحدين مثل  
 $8 + 6س - ٧$  بالطرق السابق شرحها فمن الضروري جداً أن يعتاد التلميذ كتابة حاصل  
 الضرب بمجرد النظر

ويتيسر هذا بملاحظة الكيفية التي بها تتولد معاملات الحدود في حاصل الضرب وملاحظة ما بينها  
 وبين المعاملات الرقمية في المقدارين الجبريين من الارتباطات كما يتبين مما يأتي

$$(8 + س) (٧ + س) = ٥٦ + ٧س + ٨س + س^٢$$

$$= ٥٦ + ١٥س + س^٢$$

$$(8 - س) (٧ - س) = ٥٦ + ٧س - ٨س - س^٢$$

$$= ٥٦ - ١٥س - س^٢$$

$$(8 + س) (٧ - س) = ٥٦ - ٧س + ٨س - س^٢$$

$$= ٥٦ - س - س^٢$$

$$(8 - س) (٧ + س) = ٥٦ + ٧س - ٨س - س^٢$$

$$= ٥٦ - س - س^٢$$

فلاحظ في كل حاصل من حواصل الضرب السابقة

(أولاً) أن الحاصل مركب من ثلاثة حدود

(ثانياً) أن الحد الأول عبارة عن حاصل ضرب الحد الأول من المضروب في الحد الأول من المضروب فيه  
 (ثالثاً) أن الحد الثالث عبارة عن حاصل ضرب الحد الثاني من المضروب في الحد الثاني من المضروب فيه  
 (رابعاً) معامل الحد الأوسط هو حاصل الجمع الجبرى للعديدين اللذين أحدهما الحد الثاني من المضروب  
 والآخر الحد الثاني من المضروب فيه (بمراعاة علامة كل منهما)

بعد أن يلاحظ كل ذلك يمكن كتابة حاصل الضرب من أول وهلة بمجرد النظر لكل من المضروب  
 والمضروب فيه كما في الأمثلة الآتية

$$(٢ + س) (٣ + س) = ٦ + ٥س + س^٢$$

$$(٣ - س) (٤ + س) = ١٢ + س - س^٢$$

$$(٦ + س) (٩ - س) = ٥٤ - ٣س - س^٢$$

$$(٤ - س) (١٠ - س) = ٤٠ - ١٤س - س^٢$$

$$(٦ - س) (٤ + س) = ٢٤ - ٢س - س^٢$$

ومن السهل التوسع في تطبيق هذه القاعدة وجعلها صالحة لإيجاد حاصل ضرب أى مقدارين من  
 ذوات الحدين بمجرد النظر إليهما

$$\text{مثلا } (2 \text{ ص} + 3 \text{ ص}) (2 \text{ ص} - 3 \text{ ص}) = 2^2 \text{ ص}^2 - 3^2 \text{ ص}^2 = 4 \text{ ص}^2 - 9 \text{ ص}^2$$

$$2^2 \text{ ص}^2 - 3^2 \text{ ص}^2 =$$

$$6 (3 \text{ ص} - 4 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 3 \text{ ص}) = 6 (2 \text{ ص}^2 - 3 \text{ ص}^2) = 12 \text{ ص}^2 - 18 \text{ ص}^2$$

$$2^2 \text{ ص}^2 - 3^2 \text{ ص}^2 =$$

$$6 (4 \text{ ص} - 3 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 3 \text{ ص}) = 6 (2 \text{ ص}^2 - 3 \text{ ص}^2) = 12 \text{ ص}^2 - 18 \text{ ص}^2$$

$$2^2 \text{ ص}^2 - 3^2 \text{ ص}^2 =$$

$$6 (2 \text{ ص} + 5 \text{ ص}) (2 \text{ ص} - 5 \text{ ص}) = 6 (2 \text{ ص}^2 - 5 \text{ ص}^2) = 12 \text{ ص}^2 - 30 \text{ ص}^2$$

$$2^2 \text{ ص}^2 - 5^2 \text{ ص}^2 =$$

## (تمارين ٥ و ٥)

اكتب حاصل ضرب كل من الكميات الآتية بنون إجراء عملية الضرب

$$(22) (2 \text{ ص} + 4 \text{ ص}) (2 \text{ ص} - 4 \text{ ص})$$

$$(23) (2 \text{ ص} + 7 \text{ ص}) (2 \text{ ص} - 7 \text{ ص})$$

$$(24) (2 \text{ ص} - 3 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 3 \text{ ص})$$

$$(25) (2 \text{ ص} + 1 \text{ ص}) (2 \text{ ص} - 1 \text{ ص})$$

$$(26) (2 \text{ ص} - 1 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 1 \text{ ص})$$

$$(27) (2 \text{ ص} - 1 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 1 \text{ ص})$$

$$(28) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(29) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(30) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص})$$

$$(31) (2 \text{ ص} - 3 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 3 \text{ ص})$$

$$(32) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(33) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(34) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص})$$

$$(35) (2 \text{ ص} - 3 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 3 \text{ ص})$$

$$(36) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(37) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(38) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(39) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(40) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(41) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

$$(42) (2 \text{ ص} - 2 \text{ ص}) (2 \text{ ص} + 2 \text{ ص})$$

ن

## طريقة المعاملات المنعزلة

بند ٥ ٤ - إذا أريد ضرب مقدار مركب في آخر واشتمل كل منهما على حرف واحد ذى قوى مختلفة فمن الممكن اختصار عملية ضربهما كثيرا باتباع الطريقة المسماة بطريقة المعاملات المنعزلة أى بكتابة المعاملات فقط مجردة عن الحروف وضربها بالطريقة المعتادة ووضع الحروف بعد انتهاء العملية ويلزم فى استعمال هذه الطريقة أن ترتب كلا من المقدارين حسب القوى الصاعدة أو النازلة للحرف المشترك فيما وأن نضع معاملات صفرية (أى أصفارا) محل القوى غير الموجودة

(مثلا) لضرب  $٢س^٢ - ٤س - ٥$  بـ  $٣٦س^٢ + ٤س - ٢$  نجري العمل على الكيفية الآتية

$$\begin{array}{r}
 ٥ - ٠ + ٤ - ٢ \\
 ٣ - ٤ + ٢ \\
 \hline
 ١٥ - ٠ + ١٢ - ٦ \\
 ٢٠ - ٠ + ١٦ - ٨ \\
 ١٠ + ٠ - ٨ + ٤ - \\
 \hline
 ١٠ + ٢٠ - ٧ - ٢٠ - ٤ - ٦
 \end{array}$$

وليلاحظ أنه وُضع معامل صفرى فى المضروب ليقوم مقام الحد الناقص فيه وهو المحتوى على القوة الأولى للحرف  $س$  وأكبر قوة فى حاصل الضرب هى بداهة  $س^٣$  وباقى الحدود تستعمل على الحرف  $س$  مرتبا ترتيبا تنازليا بالنسبة لقوى  $س$

وطيه يكون حاصل الضرب المطلوب

$$٦س^٣ - ٤س^٢ - ٣٠س - ٧س^٢ - ٢٠س - ١٠$$

وتستعمل طريقة المعاملات المنعزلة أيضا فى ضرب مقدارين جبريين مركبين إذا كانا متجانسين وشاملين لقوى حرفين

(مثلا) لضرب المقدار  $٣٤س^٢ + ٢١س + ٤$  فى المقدار  $٢٢س - ٢$

$$\begin{array}{r}
 ٢ + ٤ + ٠ + ٢ + ٣ \\
 ١ - ٠ + ٢ \\
 \hline
 ٤ + ٨ + ٠ + ٤ + ٦ \\
 ٢ - ٤ - ٠ - ٢ - ٣ - \\
 \hline
 ٢ - ٤ - ٤ + ٦ + ٣ - ٤ + ٦
 \end{array}$$

نموض عن الحد الناقص المحتوى على  $٢٢س$  فى المضروب معاملا صفرى وكذلك عن الحد الناقص المحتوى على  $١$  فى المضروب فيه

ومن السهل فهم كيفية وضع قوى  $١$  و  $٦$  فى الحدود المتتالية فى حاصل الضرب وهو

$$٦٦س^٢ + ٩٤س - ٣٤س^٢ + ٢١س + ٢٢س - ٢$$

(ملاحظة) يحذر المبتدئ أن لا يستعمل طريقة المعاملات المنعزلة حتى يتمكن من معرفة طريقة الضرب العادية

## الباب السادس - القسمة

بند ٤٦ - خارج قسمة  $a$  على  $b$  هو الكمية التي لو ضربت في  $b$  تنتج  $a$  وتستدل على القسمة بأحد الوضعين  $a \div b = \frac{a}{b}$  وتسمى  $a$  مقسوماً  $b$  مقسوماً عليه فالقسمة إذن عكس الضرب  $a \div b = b \times a = 1$  أى أن خارج القسمة  $\times$  المقسوم عليه = المقسوم ولكن القسمة عكس الضرب تجري قوانين الضرب في القسمة أيضاً وهذه القوانين هي القانون التبادلي وقانون التنسيق لعوامل الضرب وقانون التوزيع

بند ٤٧ - قانون العلامات يجرى أيضاً في القسمة

$$\text{مثلاً } a \div b = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{b} = 1 \div 1$$

$$-a \div b = \frac{(-a) \times 1}{1 \times b} = \frac{-a}{b} = -1 \div 1$$

$$a \div -b = \frac{a \times (1-)}{(1-) \times b} = \frac{a}{-b} = (1-) \div 1$$

$$-a \div -b = \frac{-a \times 1-}{1- \times b} = \frac{-a}{-b} = (1-) \div 1-$$

إذن في القسمة كما في الضرب

العلامات المتصلة أى التي من نوع واحد تلحق +

والعلامات المختلفة أى التي من نوعين مختلفين تلحق -

قسمة المقدار الجبرى البسيط على مثله

بند ٤٨ - تظهر القاعدة من الأمثلة الآتية

(مثال ١) لكون حاصل ضرب  $4$  في  $4$  هو  $4 \times 4 = 16$  فبقسمة  $16$  على  $4$  يكون

الخارج  $4$  أو بعبارة أخرى  $16 \div 4 = 4$

(مثال ٢) لقسمة  $27$  على  $9$

$$\text{قول إن الخارج } 3 = \frac{27}{9} = \frac{111127}{11119} = \frac{9}{9} = 1$$

وذلك بحذف العوامل المشتركة في المقسوم والمقسوم عليه كما في الحساب

$$27 \div 9 = 3$$

(مثال ٣) لقسمة  $35$  على  $17$

$$\text{قول إن الخارج } 2 = \frac{35}{17} = \frac{11135}{11117} = \frac{22}{22} = 1$$

فترى دائماً أن أس أى حرف في الخارج عبارة عن باقى طرح أسه في المقسوم عليه من أسه في المقسوم وهذا قانون الأس للقسمة وعلى ذلك يمكننا أن نضع القاعدة الآتية

قاعدة : للحصول على أس حرف في خارج القسمة نطرح أس ذلك الحرف في المقسوم عليه من أسه في المقسوم فبأى الطرح أس الحرف في الخارج  
معامل خارج القسمة عبارة عن خارج قسمة معامل المقسوم على معامل المقسوم عليه مع مراعاة قاعدة العلامات

$$( \text{مثال ٤} ) \text{ لقسمة } ٤٥ \text{ أس } ٢ \text{ على } ٩ \text{ أس } ٢ =$$

$$\text{نقول إن الخارج } ( - ) = ٥ \text{ أس } ٠ = ٥ \text{ أس } ٠ = ٥$$

$$= ٥ \text{ أس } ٠ = ٥$$

$$( \text{مثال ٥} ) - ٢١ \text{ أس } ٢ \div ( - ٧ \text{ أس } ٢ ) = ٣$$

(ملاحظة) إذا طبقنا القاعدة السابقة على قسمة قوة حرف على تلك القوة لذلك الحرف نحصل على نتيجة غريبة

$$\text{فبناء على القاعدة المتقدمة } ٦ \div ٦ = ١ = ٦ - ٦ = ٠$$

$$\text{ولكن } ٦ \div ٦ = ١ = ٦ - ٦ = ٠$$

$$١ = ٦$$

∴

وربما يدهش المبتدئ لهذه النتيجة ولكن حقيقتها تظهر له جليا عند دراسة نظريات الأسس في المبحث الخاص بها

### قسمة المقدار المركب على المقدار البسيط

بند ٤٩ - قاعدة : لقسمة مقدار مركب على عامل واحد قسم كل حد من حدود المقدار المركب على انفراده على ذلك العامل وحاصل الجمع الجبري لخارج القسمة الجزئية هو خارج القسمة المطلوب  
وتستخرج هذه القاعدة بسهولة من بند ٣٣ فليراجع

$$( \text{مثال ١} ) : ( ٩ \text{ أس } ٢ - ١٢ \text{ أس } ٢ + ٣ \text{ أس } ٢ ) \div ( ٣ - ٣ ) = ٣ - ٣ = ٠$$

$$( \text{مثال ٢} ) : ( ٣٦ \text{ أس } ٢ - ٢٤ \text{ أس } ٢ + ٢٠ \text{ أس } ٢ ) \div ( ٤ \text{ أس } ٢ ) = ٩ - ٦ + ٥ = ٨$$

$$( \text{مثال ٣} ) : ( ٢ \text{ أس } ٢ - ٥ \text{ أس } ٢ + ٢ \text{ أس } ٢ ) \div ( ٢ \text{ أس } ٢ ) = ١ - ٥ + ١ = -٣$$

$$+ ١٠ \text{ أس } ٢ - ٣ \text{ أس } ٢ = ٧ \text{ أس } ٢$$

(تمارين ١٦)

اقسم

$$( ٥ ) \text{ أس } ٢ \text{ على } ٢ \text{ أس } ٢$$

$$( ٦ ) \text{ أس } ٢ \text{ على } ٢ \text{ أس } ٢$$

$$( ٧ ) \text{ أس } ٢ \text{ على } ٢ \text{ أس } ٢$$

$$( ٨ ) ١٢ \text{ أس } ٢ \text{ على } ٣ \text{ أس } ٢$$

$$( ١ ) ٢ \text{ أس } ٢ \text{ على } ٢ \text{ أس } ٢$$

$$( ٢ ) ٢٧ \text{ أس } ٢ \text{ على } ٩ \text{ أس } ٢$$

$$( ٣ ) - ٣٥ \text{ أس } ٢ \text{ على } ٧ \text{ أس } ٢$$

$$( ٤ ) ١٠ \text{ أس } ٢ \text{ على } ١ \text{ أس } ٢$$

- (٩) - ٩ ح على ٢ ح  
(١٠) - ١٥ ص<sup>٢</sup> ع على ٥ ص<sup>٢</sup> ع  
(١١) - ١٦ ص<sup>٢</sup> على ٤ ص<sup>٢</sup>  
(١٢) - ٤٨ ح على ١٨ ح  
(١٣) - ٣٥ ح على ١٧ ح  
(١٤) - ٦٣ ح على ٩ ح  
(١٥) - ١٧ ح على ٧ ح  
(١٦) - ٢٨ ح على ٤ ح  
(١٧) - ١٦ ص<sup>٢</sup> على ٢ ص<sup>٢</sup>  
(١٨) - ٥٠ ص<sup>٢</sup> على ٥ ص<sup>٢</sup>  
(١٩) - ٢ ص<sup>٢</sup> - ٢ ص<sup>٢</sup> على ٢ ص<sup>٢</sup>  
(٢٠) - ٣ ص<sup>٢</sup> + ٢ ص<sup>٢</sup> على ٢ ص<sup>٢</sup>  
(٢١) - ٧ ص<sup>٢</sup> + ٤ ص<sup>٢</sup> على ٢ ص<sup>٢</sup>  
(٢٢) - ١٠ ص<sup>٢</sup> - ٨ ص<sup>٢</sup> + ٣ ص<sup>٢</sup> على ٢ ص<sup>٢</sup>  
(٢٣) - ١٥ ص<sup>٢</sup> - ٢٥ ص<sup>٢</sup> على ٥ ص<sup>٢</sup>  
(٢٤) - ٢٧ ص<sup>٢</sup> - ٣٦ ص<sup>٢</sup> على ٩ ص<sup>٢</sup>  
(٢٥) - ٢٤ ص<sup>٢</sup> - ٣٢ ص<sup>٢</sup> على ٨ ص<sup>٢</sup>  
(٢٦) - ٣٤ ص<sup>٢</sup> - ٥١ ص<sup>٢</sup> على ١٧ ص<sup>٢</sup>  
(٢٧) - ١ ح - ١ ح - ١ ح على ١ ح  
(٢٨) - ٢ ح - ١ ح - ١ ح على ١ ح  
(٢٩) - ٣ ص<sup>٢</sup> - ٩ ص<sup>٢</sup> - ١٢ ص<sup>٢</sup> على ٣ ص<sup>٢</sup>  
(٣٠) - ٤ ص<sup>٢</sup> - ٨ ص<sup>٢</sup> + ٦ ص<sup>٢</sup> على ٢ ص<sup>٢</sup>  
(٣١) - ١٣ ح + ١٦ ح - ١٦ ح على ٢ ح  
(٣٢) - ١ ص<sup>٢</sup> - ٣ ص<sup>٢</sup> - ٣ ص<sup>٢</sup> على ٢ ص<sup>٢</sup>  
(٣٣) - ٩ ص<sup>٢</sup> + ٩ ص<sup>٢</sup> - ٩ ص<sup>٢</sup> على ٩ ص<sup>٢</sup>  
(٣٤) - ٩ ص<sup>٢</sup> + ٧ ص<sup>٢</sup> - ٧ ص<sup>٢</sup> على ٧ ص<sup>٢</sup>  
(٣٥) - ١ ح - ١ ح - ١ ح على ١ ح

### قسمة المقدار المركب على مثله

بند ٥٠ - لقسمة مقدار مركب على مثله

- (١) رتب كلا من المقسوم والمقسوم عليه حسب القوى الصاعدة أو النازلة لحرف مشترك فيهما  
(٢) إقسم الحد الذي على يمين المقسوم على الحد الذي على يمين المقسوم عليه وضع الناتج في خارج القسمة

- (٣) اضرب الناتج في جميع حدود المقسوم عليه وضع حاصل الضرب تحت المقسوم  
(٤) اطرح ثم ضم إلى باقي الطرح ما تراه لازماً من الحدود الباقية في المقسوم وكرر العملية حتى تنفذ كل حدود المقسوم

(مثال ١) انقسم ١١ ص<sup>٢</sup> + ٣٠ ص<sup>٢</sup> على ٦ ص<sup>٢</sup> نجري العمل على الكيفية الآتية

$$\begin{array}{r} ١١ ص^٢ + ٣٠ ص^٢ \\ \underline{٦ ص^٢} \end{array}$$

فنقسم  $٢$  وهو أول حد من المقسوم على  $٣$  وهو أول حد من المقسوم عليه ثم نضرب الخارج  $٣$  في جميع حدود المقسوم عليه ونضع حاصل الضرب وهو  $٦ + ٣٠$  تحت المقسوم هكذا .

$$\begin{array}{r} ٣٠ + ١١ + ٣ \\ ٦ + ٣ \quad | \quad ٣٠ + ١١ + ٣ \\ \hline ٣٠ + ١١ + ٣ \end{array}$$

وبالطرح يكون الباقي  $٥$  وبتكرار هذا العمل نجد أن الحد الثاني من الخارج  $٥$  وتوضع العملية بأكملها على الكيفية الآتية

$$\begin{array}{r} ٣٠ + ١١ + ٣ \\ ٥ + ٣ \quad | \quad ٣٠ + ١١ + ٣ \\ \hline ٣٠ + ١١ + ٣ \\ ٥ + ٣ \quad | \quad ٣٠ + ١١ + ٣ \\ \hline ٣٠ + ١١ + ٣ \\ ٥ + ٣ \quad | \quad ٣٠ + ١١ + ٣ \\ \hline ٣٠ + ١١ + ٣ \end{array}$$

والسبب في وضع القاعدة على هذه الكيفية إنما هو إمكان تجزئة المقسوم إلى أجزاء بقدر الحاجة ثم يحصل على الخارج الكلي بجمع الخارج الجزئية مجعاً جبرياً . ففي المثال السابق جرئت الكية  $٣٠ + ١١ + ٣$  إلى جزأين  $٣٠ + ١١$  و  $٣$  وقسم كل منهما على  $٥ + ٣$  للحصول على الخارج الكلي  $٥ + ٣$

(مثال ٢) لقسمة  $٢٤ - ٦٥$  على  $٢١ + ٣$  على  $٨ - ٣$  صـ نجري العمل كما يأتي

$$\begin{array}{r} ٢٤ - ٦٥ \\ ٢٤ - ٩ \quad | \quad ٢١ + ٣ \\ \hline ٥٦ - ٢١ + ٣ \\ ٥٦ - ٢١ + ٣ \end{array}$$

(تمارين ٦ ب)

١) $٣ + ٢$ على $١ + ٣$	٢) $١٢ + ٣$ على $٣ - ١$
٣) $١١ + ٣$ على $١ - ٥$	٤) $١٤٩ + ١٠٠$ على $١ - ٢٥$
٥) $١٠ + ٣$ على $٣ + ٣$	٦) $١١ + ٥$ على $٢ + ١$
٧) $١١ + ٣$ على $٢ + ١$	٨) $٢١ + ٣$ على $٢ + ١$
٩) $١٦ + ٣$ على $٣ + ١$	١٠) $٣٤ + ١١$ على $٣ + ١$
١١) $٢٣ + ١٥$ على $٤ + ٣$	١٢) $٧ - ٣$ على $٢ - ٣$
١٣) $٣ + ١٤$ على $٢ - ٣$	١٤) $٣ - ١٤$ على $٢ - ٣$



$$\begin{array}{l}
 (١٥) \quad ٦س - ٣١س + ٣٥س على ٢س - ٧س \quad | \quad (١٨) \quad ١١٧س + ١١٥س - ٤س على ١٣س + ٤س \\
 (١٦) \quad ٤س + س - ١٤س على س + ٢س \quad | \quad (١٩) \quad ١١٢س - ١١س - ٣٣س على ٤س - ٩س \\
 (١٧) \quad ١١٢س - ١٧س - ١٢س على ١٣س - ٤س \quad | \quad (٢٠) \quad ٩س + ٦س - ٣٥س على ١٣س + ٧س \\
 (٢١) \quad ٦٠س - ٤س - ٤٥س على ١٠س - ٩س \\
 (٢٢) \quad ٩٦س - ١٥س - ٤س - ٤س على ١٢س - ٥س \\
 (٢٣) \quad ٧س + ٩٦س - ٢٨س على ٧س - ٢س \\
 (٢٤) \quad ١٠٠س - ٣س - ١٣س على ٣س + ٢٥س \\
 (٢٥) \quad ٢٧س + ٩س - ٣س - ١٠س على ٣س - ٢س \\
 (٢٦) \quad ١٦س - ٤٦س + ١٣٩س - ٩س على ١٨س - ٣س \\
 (٢٧) \quad ١٥س + ١٣س - ١٧س - ٤س على ٥س - ١٤س \\
 (٢٨) \quad ١٦س - ٩٦س + ٢١٦س - ٢١٦س + ٨١س على ٢س - ٣س
 \end{array}$$

بند ٥١ - إذا اشتمل المقسوم عليه على أكثر من حدين يمكن إجراء عملية القسمة بالطريقة عينها وهي المبينة بالبند ٥٠

(مثال ١) لقسمة ٦س - ٤س + ٥س - ٥س - ٢س على ١٥س - ٢س - ٣س + ٣س  
يجرى العمل كما يأتي

$$\begin{array}{r}
 ٦س - ٤س + ٥س - ٥س - ٢س \quad | \quad ١٥س - ٢س - ٣س + ٣س \\
 \hline
 ١٥س - ٢س - ٣س + ٣س \quad | \quad ١٥س - ٢س - ٣س + ٣س \\
 \hline
 ٢س - ٥س - ٣س - ٥س - ٢س \\
 ٢س - ٣س + ٣س - ٢س \\
 \hline
 ٤س - ٣س - ٨س - ٢س - ٢س \\
 ٤س - ٣س + ٢س - ٦س - ٢س \\
 \hline
 ١٥س - ٥س - ٢س - ١٥س \\
 ١٥س - ٥س + ٢س - ١٥س
 \end{array}$$

(مثال ٢) لقسمة ٢س + ١٠س - ١٦س - ١٣٩س + ١٥س على ٢س - ١٤س - ٤س نرتب المقدارين حسب القوى الصاعدة للحرف ١ ونستعمل طريقة المعاملات المنزلة المذكورة في بند ٤٥ هكذا

$$\begin{array}{r}
 ١٥س + ٢س + ٣٩س - ١٦س - ١٠س \quad | \quad ١٥س - ٤س - ٢س \\
 \hline
 ٢س + ١٤س - ٤س \\
 ١٠س - ٨س - ٤س \\
 \hline
 ١٥س + ١٢س + ٦س - \\
 ١٥س + ١٢س + ٦س - \\
 \hline
 ١٣س - ١٢س + ٥س
 \end{array}$$

فالمخرج إذن



بند ٥٤ - كانت القسمة في جميع الأمثلة المتقدمة صحيحة أى أن المقسوم اشتمل على المقسوم عليه مرات صحيحة أما إذا كانت القسمة غير صحيحة فيجب الاستمرار في العملية حتى نصل إلى باق تكون درجته اقل من درجة المقسوم عليه (راجع بند ٢٤)

## (تمرين ٦)

(يمكن أن تعمل العشرون تمريناً الأولى بطريقة المعاملات المنعزلة المبينة بالبند ٥١)

أجر عمليات القسمة الآتية

- (١)  $س^٢ - س^٢ - ٩س - ١٢$  على  $س^٢ + ٣س + ٣$
- (٢)  $س^٢ - ٣س^٢ - ٦س - ١$  على  $س^٢ + ٢س - ٥س - ١$
- (٣)  $س^٢ - ٢س - ١٤س + ٢$  على  $س^٢ + ٢س + ١ - ٢٤س$
- (٤)  $س^٢ - ٩س + ١٣س + ٤س + ١٣س + ١٣س - ١٣س - ١$  على  $س^٢ + ١٣س - ١٣س - ١$
- (٥)  $س^٢ + ٣س + ٧س - ٢س - ٦س + ٨س$  على  $س^٢ + ٢س + ٨س$
- (٦)  $س^٢ - ١س - ١٨س + ١٣س - ١٢س + ٩س$  على  $س^٢ + ١٣س - ١٢س + ٩س$
- (٧)  $س^٢ + ١٣س + ١٣س + ١٣س + ٤س$  على  $س^٢ + ١٣س + ١٣س + ٤س$
- (٨)  $س^٢ - ٢س - ٤س + ٧س + ١س$  على  $س^٢ - ٢س - ٤س + ٧س + ١س$
- (٩)  $س^٢ - ٥س + ٩س - ٦س - ٢س + ٢س$  على  $س^٢ - ٥س + ٩س - ٦س - ٢س + ٢س$
- (١٠)  $س^٢ - ٤س + ٢س + ٢س - ٢س + ٢س$  على  $س^٢ - ٤س + ٢س + ٢س - ٢س + ٢س$
- (١١)  $س^٢ - ١١س - ٨٢س - ٢س$  على  $س^٢ - ١١س - ٨٢س - ٢س$
- (١٢)  $س^٢ - ٩س + ٧١س + ٢٨س - ٣٥س$  على  $س^٢ - ٩س + ٧١س + ٢٨س - ٣٥س$
- (١٣)  $س^٢ - ١٥س + ٤س + ٧س - ٢س + ٢س$  على  $س^٢ - ١٥س + ٤س + ٧س - ٢س + ٢س$
- (١٤)  $س^٢ + ١٥س - ٢٢س + ٢٢س - ٢س$  على  $س^٢ + ١٥س - ٢٢س + ٢٢س - ٢س$
- (١٥)  $س^٢ - ٨س + ١٢س + ٧س - ٢س$  على  $س^٢ - ٨س + ١٢س + ٧س - ٢س$
- (١٦)  $س^٢ - ٢س - ٤س + ١٩س - ٢س$  على  $س^٢ - ٢س - ٤س + ١٩س - ٢س$
- (١٧)  $س^٢ - ١٩٢س - ١٢٨س + ٤س - ٨س$  على  $س^٢ - ١٩٢س - ١٢٨س + ٤س - ٨س$
- (١٨)  $س^٢ - ١٤س + ٤٥س + ٧٨س + ٤س + ١٤س$  على  $س^٢ - ١٤س + ٤٥س + ٧٨س + ٤س + ١٤س$
- (١٩)  $س^٢ - ٢س + ٢س + ٢س + ٢س + ٢س$  على  $س^٢ - ٢س + ٢س + ٢س + ٢س + ٢س$
- (٢٠)  $س^٢ + ٢س - ٢س + ٢س + ٢س + ٢س$  على  $س^٢ + ٢س - ٢س + ٢س + ٢س + ٢س$
- (٢١)  $س^٢ - ٢س$  على  $س^٢ - ٢س$
- (٢٢)  $س^٢ - ٩س + ٢س + ٢س + ٢س$  على  $س^٢ - ٩س + ٢س + ٢س + ٢س$
- (٢٣)  $س^٢ - ٢س - ١٤س - ٧س - ٧س + ١٤س$  على  $س^٢ - ٢س - ١٤س - ٧س - ٧س + ١٤س$
- (٢٤)  $س^٢ + ١٣س + ١ - ٢س + ١٣س$  على  $س^٢ + ١٣س + ١ - ٢س + ١٣س$



رابعا : المقادير الجبرية  $س^٢ + ٦س^٢ + ٦س + ٦س + ٦س + ٦س$  التي فيها الأسس زوجية وحدا كل منها موجبان لا تقبل القسمة أبدا على  $س + ٦س$  ولا على  $س - ٦س$  ويمكن تلخيص كل ما سبق فيما يلي

(أولا)  $س^٢ - ٦س$  تقبل القسمة على  $س - ٦س$  إذا كانت  $٦$  أي عدد صحيح  
 (ثانيا)  $س^٢ + ٦س$  تقبل القسمة على  $س + ٦س$  إذا كانت  $٦$  أي عدد صحيح فردى  
 (ثالثا)  $س^٢ - ٦س$  تقبل القسمة على  $س + ٦س$  إذا كانت  $٦$  أي عدد صحيح زوجي  
 (رابعا)  $س^٢ + ٦س$  لا تقبل القسمة على  $س + ٦س$  ولا على  $س - ٦س$  إذا كانت  $٦$  أي عدد صحيح زوجي

## الباب السابع - إزالة الأقواس وإدخالها

بند ٥٦ - تحصر الكميات بين قوسين للدلالة على أنه يلزم أن نجري في جميعها عملية واحدة .  
 ففي المقدار  $١٢ - ٣ - (١٤ - ٢ - ٣)$  مثلا بدل القوسان على أن  $١٤ - ٢ - ٣$  بمتبر كمقدار واحد يجب طرحه من  $١٢ - ٣$  والمقدار الجبري المحصور بين قوسين يجوز أن يحصر جزء منه بين قوسين آخرين وإنما يستعمل في ذلك أقواس مخالفة في الصبورة للأقواس الأصلية والأقواس المستعملة عادة هي  $( )$   $\{ \}$   $[ ]$

وقد يرسم أحيانا خط أفقي فوق المقدار المراد حصره بين قوسين فالمقدار  $١ - ٣ + ٥$  هو عين المقدار  $١ - (٣ + ٥)$  وعليه يكون  $١ - ٣ + ٥ = ١ - ٣ - ٥$

### إزالة الأقواس

بند ٥٧ - يحسن في إزالة الأقواس عادة أن نبدأ بالإدخاله منها ثم بالتي تليها من الداخل ثم بالتي تلي الأخيرة وهكذا متبعين في العمل ما جاء بالبندين ٢١ ٦ ٢٢  
 (مثال ١) لاختصار ما يأتي بواسطة إزالة الأقواس

$$١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠$$

تزال الأقواس اثنتين اثنتين هكذا

$$١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠$$

$$١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠$$

$$١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠$$

$$١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠$$

$١٢$  بعد اختصار الحدود المتشابهة

(مثال ٢) لاختصار المقدار

$$[ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠ ]$$

$$[ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠ ]$$

$$[ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠ ]$$

$$= - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠$$

$$= - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠$$



بند ٥٩ - يحسن في بعض الأحيان أن تختصر المقادير أثناء السير في العمل

مثلا إذا أريد معرفة قيمة المقدار

$$[ \{ \overline{٥ - ٩ - ٨} \} ٣ + ١٧ - \{ ٤ - ١١ - ٧ - ٨٤ ]$$

نقول إن المقدار يساوي

$$[ \{ \{ ٥ + ٩ - ٨ \} ٣ + ١٧ - \{ ٤ - ١١ - ٧ - ٨٤ \} ]$$

$$[ \{ \{ ١ - ٥ \} ٣ + ١٧ - \{ ٤ - ١١ - ٧ - ٨٤ \} ]$$

$$[ \{ ٣ - ١٥ + ١٧ - \{ ٤ - ١١ - ٧ - ٨٤ \} ]$$

$$[ \{ ٣ - ٢ - \{ ٤ - ١١ - ٧ - ٨٤ \} ]$$

$$[ ١٢ + ٨ + ١١ - ٧ - ٨٤ ]$$

$$[ ١٢ + ٣ - ٧ - ٨٤ ]$$

$$٨٤ - ٢١ + ٨٤ =$$

$$٢١ =$$

ويمكن الطالب بعد تبون قليل أن يقلل خطوات العمل كثيرا عما سبق

### (تمارين ٧ ب)

اختصر ما يأتي بواسطة إزالة الأقواس

$$(١) [ \{ \{ ٢ + ٥ - ١٢ + \{ ١ + ١ \} - ١٣ - ٢ \} + ٥ - ١ ]$$

$$(٢) [ \{ \{ \{ ١ - ٢ + ٥ \} - ١ + ٢ \} - ٥ + ١ \} - ١ + ٢ - ٥ + ١ ]$$

$$(٣) [ \{ \{ ١ - (١ - ٢) ٣ - ٢ + ٥ \} ٢ - ٢ - ٥ - ١ \} - (٢ - ٥) - ١ ]$$

$$(٤) \{ ٢ - ٣ - (٤ - ٤ - ٢) - \{ ٢ - (٣ - ٤ + ٤) \} - \{ ٣ - ٢ + ٤ \} - (٤ - ٤ - ٢) \}$$

$$(٥) [ \{ \{ \{ ٥ - ١ + ٢ \} - ٥ + ١ \} - ٢ + ٥ \} - ١ + ٢ - ٥ + ١ ]$$

$$(٦) \{ [ (٥ - ١١٠) ٢ + ١٦ ] - ١٥ \} - ٥ - ٣$$

$$(٧) [ \{ ٢ + ٥ \} ٢ - ٢ - ٥ - ١ ] - (٢ - ٥) - ١$$

$$(٨) [ \{ \{ ١٢ - ١٩ \} - ٨ \} - ٦ ] - ١٣$$

$$(٩) [ \{ \{ ١ - (٥ - ١) ٢ - ١ + ٢ \} ٢ - ٢ - ١ - ٥ \} - (١ - ٢) - ٥ ]$$

$$(١٠) [ \{ \{ ١ - ٤ - ١ + ٢ \} ٣ - ١ + ٢ + ٥ \} ٢ - (٢ - ٥) ٣ + (١ - ١) ٢٠ - ]$$

$$(١١) [ \{ \{ ٢ + ٥ \} ٤ - ١ + ٢ \} ٣ - ١ + ٢ + ٥ \} ٢ - (٢ - ٥) ٢٤ + (١ + ١) ٤ - ]$$

$$(١٢) ٤ + [ \{ \{ ٥ - ١ + ٢ \} - ٥ + ١ \} ٣ - ٥ + ١ + ٢ \} - (٥ + ١) ١٠ - ]$$

$$(١٣) [ \{ \{ \{ ٢ + ٥ + ١ \} ٢ - ٢ - ٥ - ١ \} - \{ \} \} - (٢ - ٥) ٢ - ١ ]$$

$$(١٤) [ \{ \{ \{ ١ + ٥ - ٢ \} ٣ - ٥ - ١ \} - \{ \} \} - (٢ - ٥) ٨ ]$$

$$(١٥) [ \{ \{ ٥ - ٢ \} ٦ - ١ \} ٧ - (١٥ - ٥) ٢ ]$$

$$(١٦) [ \{ \{ \{ ٢ - ١ \} ٤ - ٥ \} ٣ - ١ \} ٤ - \{ \{ ٢ + ٥ \} ٣ - ٥ \} ٢ - ١ ]$$

$$\begin{aligned}
 (١٧) & \{ ٥ - ١ \{ ٢ - ١ \} [ (س + ١) ٢ - ١ ] ٢ - ١ \{ ٤ - ١ \} [ (س + ١) ٢ - ١ ] ٢ - ١ \} \\
 (١٨) & \{ ١٠ - ١ \{ ٦ - ١ \} [ (س - ١) - ١ ] ٦ + \{ ٦٠ - ١ \} [ (س + ١) - ١ ] ٦ + \{ ١ + س \} - ١ \\
 (١٩) & \{ ٣ - ١ \{ ٢ - ١ \} [ (١ - س) - ١ ] ٢ - ١ \{ ٥ + ١ \} [ (١ - س) - ١ ] ٢ - ١ \} \\
 (٢٠) & \{ ٢ - ١ \{ ٢ - ١ \} [ (س - س) - ١ ] ٢ - ١ \{ ٢ - ١ \} [ (س - س) - ١ ] ٢ - ١ \} \\
 (٢١) & \{ ١ \{ ١ - ١ \} [ (١ - س) - ١ ] ١ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (١ - س) - ١ ] ١ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (١ - س) - ١ ] ١ - ١ \} \\
 (٢٢) & ٣٥ \{ ٣ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (س - ٧) - ١ ] ٣ - ١ \{ ٥ - ١ \} [ (س - ٧) - ١ ] ٣ - ١ \} + ٨ \{ (س - ٢) - ١ \} \\
 (٢٣) & \{ ٢ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (س - ١) - ١ ] ٢ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (س - ١) - ١ ] ٢ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (س - ١) - ١ ] ٢ - ١ \} \\
 (٢٤) & \{ ١ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (س - ١) - ١ ] ١ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (س - ١) - ١ ] ١ - ١ \{ ١ - ١ \} [ (س - ١) - ١ ] ١ - ١ \}
 \end{aligned}$$

## إدخال الأقواس

بند ٦٠ - إدخال الأقواس عكس إزالتها وهو ذو أهمية عظيمة وقد أوردنا قاعدتيه في البندين ٢٧ ٢٨ وسنعيدهما هنا لزيادة الفائدة

- (١) يمكن دمج أى جزء من مقدار جبرى بين قوسين مسبوقين بعلامة + مع بقاء علامة كل حد داخل القوسين كما هي
- (٢) يمكن حصر أى جزء من مقدار جبرى بين قوسين مسبوقين بعلامة - بشرط أن تغير علامة كل حد داخل القوسين

$$\begin{aligned}
 \text{أمثلة :} & \quad (س - د - ح) + ب - ١ = س - د - ح + ب - ١ \\
 & \quad (س + د) - (س - ب) - ١ = س + د - س + ب - ١ \\
 & \quad (س - ١) + (س - ١) = س - ١ + س - ١ \\
 & \quad (س - ١) - (س - ١) = س - ١ - س + ١
 \end{aligned}$$

بند ٦١ - يمكن حصر حدود أى مقدار جبرى داخل أقواس بكيفيات متنوعة

مثلا  $س - ب + س + س - ١ + س + ب - ح - د$  يمكن أن يكتب باحدى الكيفيات الآتية

$$\begin{aligned}
 & (س - ب + س) + (س - ١ + س) + (س - ح - د) \\
 & (س - ب + س + س - ١) - (س - ح - د) \\
 & (س - ١ + س - ح - د) + (س - ب + س)
 \end{aligned}$$

بند ٦٢ - إذا وجد عامل مشترك فى كل حد من الحدود المحصورة بين قوسين يمكن وضع ذلك العامل خارجهما باعتبار أنه معامل لجميع المقدار المحصور بينهما

(مثال ١) إذا أدخلنا فى

$$س - ح + س - د + س - ب + س - ح - د + س - ب + س - د - ح - د$$

قوى س المتساوية كلا بين قوسين علامتهما موجبة





بند ٦٣ - يحسن أحيانا في عمليات جمع المقادير المركبة من حدود ذات معاملات حرفية أو ضربها أو غير ذلك من العمليات أن ترتب الحدود حسب قوى حرف مشترك فيها وبذلك يسهل الحصول على النتيجة المطلوبة

(مثال ١) الجمع

$$أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

قول إن حاصل الجمع

$$= أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$= أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$= (أ - ب)^٢ - (أ - ب)^٢ - (أ - ب)^٢ - (أ - ب)^٢ - (أ - ب)^٢ - (أ - ب)^٢ - (أ - ب)^٢ - (أ - ب)^٢$$

(مثال ٢) لضرب

قول إن حاصل الضرب

$$= (أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢) (أ - ب)$$

$$= أ^٣ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢$$

$$= أ^٣ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢ - ٢ أ^٢ ب + ٢ أ ب^٢$$

(تمارين ٧ د)

الجمع المقادير الآتية ورتب حواصل الجمع حسب قوى

$$(١) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(٢) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(٣) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(٤) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(٥) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

اضرب المقادير الآتية ورتب حواصل الضرب حسب قوى

$$(٦) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(٧) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(٨) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(٩) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(١٠) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(١١) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(١٢) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(١٣) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

$$(١٤) أ^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب - ٢ ب^٢ - ٢ أ ب + ٢ ب^٢$$

## الباب الثامن - المعادلات البسيطة

بند ٦٤ - المعادلة عبارة عن وضع يدل على تساوى مقدارين جبريين

$$\text{مثلا (١) } ٣ + ٣ = ٤ + ٢ \quad \text{معادلتان} \\ \text{(٢) } ٤ = ٢ + ٢$$

الجزءان اللذان يتركب منهما المعادلة أى المفصولان بعلامة التساوى يسميان طرفي المعادلة ويقال للجزء الأيمن الطرف الايمن وللأيسر الطرف الأيسر

بند ٦٥ - إذا تساوى طرفا المعادلة دائماً مهما أعطينا من المقادير الرقمية للرموز المستعملة فيها سميت المعادلة متطابقة

فالمعادلة (١) المتقدمة متطابقة كما يتضح من اختصار الحدود التى بالطرف الايمن

أما إذا كان الطرفان لا يتساويان إلا إذا كان للرموز الداخلة فيهما قيمة مخصوصة فالمعادلة تسمى معادلة شرطية أو بالاختصار معادلة فقط

وعلى هذا فالمتساوية  $٤ = ٢ + ٢$  التى لا تكون صحيحة إلا إذا كانت  $٣ = ٣$  هى مما ينطبق عليها عادة اسم معادلة ويقال للعدد ٣ أنه يحقق المعادلة . والفرض من هذا الباب البحث فى الطرق التى توصلنا لإيجاد القيم التى تحقق المعادلات البسيطة

بند ٦٦ - يسمى الحرف الذى يبحث عن قيمته فى أى معادلة الكمية المجهولة أو المجهول وعملية إيجاد هذه القيمة تسمى عملية حل المعادلة والقيمة نفسها تسمى جذر المعادلة أو حلها

بند ٦٧ - إذا وضعت المعادلة فى أبسط أشكالها وكانت قوة المجهول فيها الأولى سميت معادلة بسيطة أو معادلة من الدرجة الأولى ويرمز للمجهول عادة بالحرف  $x$

بند ٦٨ - حل المعادلات البسيطة يتوقف على معرفة البديهيات الآتية فقط

- (١) إذا أضيفت أشياء متساوية إلى أخرى متساوية فخواصل الجمع متساوية
- (٢) إذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى متساوية فبقاوى الطرح متساوية
- (٣) إذا ضربنا أشياء متساوية فى أخرى متساوية فخواصل الضرب متساوية
- (٤) إذا قسمنا أشياء متساوية على أخرى متساوية فبقاوى القسمة متساوية

(مثال ١) حل المعادلة  $٧ = ٤$

نقسم الطرفين على ٧ (البديهى الرابع) فيحدث  $٢ = ٢$

(مثال ٢) حل المعادلة  $٦ = ٣$

نضرب الطرفين فى ٢ (البديهى الثالث) فيحدث  $١٢ = ٦$

(مثال ٣) حل المعادلة  $٧ = ٢$  -  $١٠ = ٣$  -  $٢٣ = ١٥$

نجد باختصار الحدود فى كل من الطرفين أن  $٤ = ٤$

وبالقسمة على ٤ (البديهى الرابع) يحدث  $٧ = ٧$

## أمثلة تعمل شفها

ما القيمة التي تصح بها كل من المعادلات الآتية

٣٩ = ٥١ - (١٧)	٣٥ - = ٧ - (٩)	١٨ = ٣ - (١)
٧ - = ٣ - (١٨)	٣٠ = ٥ - (١٠)	١٢ = ٤ - (٢)
٣٥ = ٢٨ - (١٩)	١٢ - = ٢ - (١١)	١٢ = ٦ - (٣)
٥١ - = ٣٤ - (٢٠)	٢١ = ٣ - (١٢)	٧ - = ٧ - (٤)
٧ = $\frac{٣}{٤}$ (٢١)	٠ = ٣ - (١٣)	٢١ = ٣ - (٥)
٣ - = $\frac{٣}{٧}$ (٢٢)	٠ = ٤ - (١٤)	٥٥ = ١١ - (٦)
٤ = $\frac{٣}{٥}$ - (٢٣)	١١ = ٢ - (١٥)	٣٩ = ١٣ - (٧)
٠ = $\frac{٣}{٤}$ (٢٤)	١٥ = ٩ - (١٦)	٤٢ - = ١٤ - (٨)

$$١١ - ٣٣ + ٩ - ١٧ = ٣ - ٥ + ٨ - (٢٥)$$

$$١٠ + ٧ + ٥ - ١٢ = ٨ + ٧ - ٥ - (٢٦)$$

$$١٣ - ٦ + ٢ - ٢٩ = ٥ + ١٢ - ٣ - (٢٧)$$

$$١٧ + ٦٠ - ٨ + ٢٨ - = ٢٧ + ٩ - ١٥ - ٤ - (٢٨)$$

بند ٦٩ - في كل من الأمثلة المتقدمة وضعت كل الحدود المحتملة على المجهول في طرف والمشتمة على الأعداد في الطرف الآخر ويمكننا دائماً إجراء هذا الترتيب بتطبيق البنيات المتقدمة

$$١٢ + ٣ = ٨ - ٣ \quad (\text{مثلاً}) \quad \text{حل المعادلة}$$

$$١٢ = ٨ - ٣ - ٣ \quad \text{نطرح ٣ من الطرفين فيحصل}$$

$$٨ + ١٢ = ٣ - ٣ \quad \text{ثم نضم ٨ للطرفين فيحصل}$$

$$٢٠ = ٢ \quad \text{ويكون}$$

$$١٠ = ٣ \quad \text{وبالقسمه على ٢ يحدث}$$

بند ٧٠ - على المبتدئ ان يحقق المعادلة أى يختبر صحتها بوضع القيمة الناتجة بدل المجهول في الطرفين

$$١٢ + ٣ = ٨ - ٣ \quad \text{ففي المثال الأخير}$$

$$١٠ = ٣ \quad \text{إنفا كانت}$$

$$٢٢ = ٨ - ١٠ \times ٣ \quad \text{يصير الطرف الأيمن}$$

$$٢٢ = ١٢ + ١٠ \quad \text{والطرف الأيسر}$$

وبما أن الناتجين متساويان فالحل صحيح

بند ٧١ - يجب الاختصار في الأمثلة الآتية قبل البدء في الحل

(مثال ١) حل المعادلة  $٥(س - ٣) - ٧(س - ٦) = ٢٤ - ٣(٨ - س) - ٣$

نزول الأقواس فنجد أن

$$٥س - ١٥ - ٧س + ٤٢ = ٢٤ - ٢٤ + ٢٤ - ٣س + ٢٤ - ٢٤$$

ثم نختصر الحدود فيحصل أن

$$١٢س - ١٥ = ٥٧ - ٣س$$

ثم نطرح  $٣س$  من كل من الطرفين فينتج أن  $٩س - ١٥ = ٥٧ - ٣$  (البديهي الثاني)

وبضرب  $٥٧$  إلى كل من الطرفين نجد أن  $٩س = ٥٤$  (البديهي الأول)

وبالقسمة على  $٩$  ينتج أن  $س = ٦$  (البديهي الرابع)

[التحقيق : إذا كانت  $س = ٦$

فالطرف الأيمن  $٥ = ٣(٨ - ٦) - ٧(٦ - ٦) =$

$$١٥ = ٠ - ٣ \times ٥ =$$

والطرف الأيسر  $٢٤ - ٣(٨ - ٦) - ٢٤ =$

$$٢٤ - ٢ \times ٣ - ٢٤ =$$

$$١٥ = ٩ - ٢٤ =$$

فالحل إذن صحيح]

(مثال ٢) حل المعادلة  $\frac{٤}{١٠} - \frac{٣}{١٠} = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠}$

يمكن أن نبداً بإزالة المعاملات الكسرية من طرفي المعادلة وذلك بضرب كل حد من حدود طرفي

المعادلة في المضاعف المشترك البسيط للمقامات (البديهي الثالث)

فبضرب كل حد في  $٢٠$  ينتج  $١٦س - ٦ = ٦س + ٤$

ثم نطرح  $٦س$  من كل من الطرفين فيحصل أن

$$١٠س = ١٠$$

وبضرب  $١٠$  إلى كل من الطرفين نجد  $١٠س = ١٠$

وبالقسمة على  $١٠$  يحدث أن  $س = ١$

التحقيق - إذا كانت  $س = ١$

فالطرف الأيمن  $\frac{٣}{١٠} - \frac{٣}{١٠} = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠} =$

$$\frac{٣}{١٠} = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠} = \frac{٦}{١٠}$$

والطرف الأيسر  $\frac{٣}{١٠} = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠} = \frac{٦}{١٠}$

فالحل إذن صحيح

بند ٧٢ - قد أسهينا في الأمثلة المتقدمة وأوضحنا كل ما يمكن إيضاحه بتفصيل دقيق ليرى المتعلم

بنفسه المراد من كل خطوة من خطوات الحل . وينبغي أن يراعى في أثناء العمل أن تكون كل خطوة

في سطر جديد وأن تنبى على إحدى البديهيات الأساسية المتقدمة ذكرها وينبغي أيضاً أن يكون الغرض

من كل خطوة اختصار المعادلة تدريجاً حتى نقول إلى حدّين أحدهما شامل للجهد  $س$  في طرف

والآخر شامل لكيفية معلومة في طرف الآخر وحينئذ نحصل على جذر المعادلة بقسمة الطرفين على معامل  $س$

ولا بد من مراعاة النظام والترتيب في تدوين كل خطوة كما أنه يجب أن توضع علامات التساوي أحداها تحت سابقتها في صف رأسى على وجه واضح . ونورد التمارين الآتية في حل المعادلات وهي خالية من الصعوبات قريبة الحل والفرض منها تمرين المتعلم على مراعاة النظام وتعويد الترتيب واختيار الطرق المثلى في حل المعادلات

### (تمارين ٨)

أوجد مقدار سـ في كل من المعادلات الآتية وحقق النتيجة في كل منها

(١٠) $4س - 3 = 3س + 4$	(١) $17س - 4 = 7س$
(١١) $8س - 9 = 33س - 4س$	(٢) $3س - 5 = 10س$
(١٢) $5س + 3 = 15س - 3س$	(٣) $23س + 15 = 2س$
(١٣) $2س + 15 = 27س - 4س$	(٤) $21س - 9 = 5س$
(١٤) $7س + 11 = 3س + 27س$	(٥) $18س - 7س = 8س$
(١٥) $15س - 5 = 24س - 8س$	(٦) $3س - 25 = 2س$
(١٦) $9س + 21 - 4س = 46س$	(٧) $4س - 3 = 2س + 1س$
(١٧) $5س + 7 + 4س + 11 + 3س = 24س$	(٨) $6س - 1 = 5س + 2س$
(١٨) $9 - 6س - 19س + 10س = 0$	(٩) $4س - 2 = 3س + 2س$
(١٩) $7س - 3س = 5س + 4س + 11س - 16س$	(١٠) $3س - 5 = 7س + 1س$

(٢١)  $6س + 7 - 19س = 7س + 13س - 3س - 21س$   
 (٢٢)  $3س + 4 + 10س - 17 = 14س - 23س + 16س - 7س$

حل المعادلات الآتية وأجر عملية تحقيق الناتج في كل منها

(٢٨) $\frac{3س}{9} = \frac{س}{8}$	(٢٣) $\frac{س}{6} = \frac{س}{3}$
(٢٩) $9س - 1س = \frac{1}{4}س - \frac{1}{5}س$	(٢٤) $\frac{4س}{4} = \frac{س}{5}$
(٣٠) $1س + \frac{1}{5}س = \frac{1}{3}س - \frac{س}{3}$	(٢٥) $\frac{5س}{12} = \frac{2س}{3}$
(٣١) $\frac{2س}{3} - \frac{4س}{9} = 2س - \frac{1}{3}س$	(٢٦) $\frac{7س}{10} = \frac{4س}{5}$
(٣٢) $1س - \frac{1}{4}س = 3س - \frac{1}{8}س + 1س - \frac{1}{8}س$	(٢٧) $\frac{4س}{9} = \frac{7س}{6}$

بند ٧٣ - إذا كثرت التلميذ حتى ثبتت في ذهنه الأسباب الداعية لمراتب العمل المتعددة يمكن وضع الحل بطريقة مختصرة

نقل الحجة عبارة عن تغيير موضعه من أحد طرفي المعادلة إلى الطرف الآخر

وسنين فيما يأتي أن كل حد يمكن نقله من طرف إلى آخر بكتابته بعلامة تغير علامته الأولى

ففي المعادلة  $٣س - ٨ = ١٢ + ٣س$  مثلا

إذا طرحنا  $٣س$  من الطرفين يحدث أن  $٣س - ٨ = ١٢$

وبعزم  $٨$  إلى الطرفين يحدث أن  $٣س - ٨ + ٨ = ١٢ + ٨$

فدري أن  $٣س$  نقلت أي حوّلت من أحد الطرفين إلى الآخر بشكل  $-$   $س$  وكذلك نرى

أن  $- ٨$  حوّلت من أحد الطرفين إلى الآخر بشكل  $+$   $٨$  وهكذا الحال في باقي الحدود

وبما تقدم يستنتج أن المعادلة لا تتغير بتغيير علامات جميع حدودها لأن ذلك معناه نقل كل حدودها

من طرف إلى آخر ثم جعل طرفها الأيمن أيسر والأيسر أيمن

مثال ذلك  $٣س - ١٢ = ٢٤ - س$

فبالنقل يحدث  $- س = ٢٤ + ٣س - ١٢$

وبتحويل كل من الطرفين إلى الجهة المضادة التي كان بها يحدث أن

$٣س + ١٢ = ٢٤ + س$

وهي عين المعادلة الأولى مع تغيير علامة كل حد من حدودها

بند ٧٤ - الآن يمكن وضع القاعدة العامة لحل المعادلات البسيطة ذات المجهول الواحد وهي

أن تزال أولا الكسور إن وجدت ثم تنقل كل الحدود المشتملة على الكمية المجهولة إلى طرف

والكميات المألومة إلى الطرف الآخر ثم تختصر الحدود المتشابهة في كلا الطرفين وبعد هذا يقسم الطرفان

على معامل المجهول فتنتج قيمته

(مثال ١) لحل  $٥س - (٤س - ٧) = (٣س - ٥) = ٦ - ٣(٤س - ٩) (س - ١)$

نضرب  $(٤س - ٧)$  في  $(٣س - ٥)$   $٦ - ٣(٤س - ٩)$  في  $(س - ١)$  إما بالطريقة العادية

أو بمحزب النظر [ راجع بند ٤٤ ] وهذا قبل إجراء عملية التحويل فنجد أن

$٥س - (١٢س - ٢٨) = ٣س - ٥ = ٦ - ٣(٤س - ٩) (س - ١)$

ورفع الأقواس يحدث أن

$٥س - ١٢س + ٢٨ = ٣س - ٥ = ٦ - ١٢س + ٢٧ + ٣س - ٣٩$

فنعرج  $- ١٢س$  من الطرفين وهو ما لا يترتب عليه شيء ما من حيث صحة المعادلة

فيكون  $٥س + ٢٨ = ٣س - ٥ = ٦ - ١٢س + ٢٧ + ٣س - ٣٩$

وبالنقل يحدث أن  $٥س + ٢٨ = ٣س - ٥ = ٦ - ١٢س + ٢٧ + ٣س - ٣٩$

وبالاختصار يحدث أن  $١٤س = ٧$

$٢س = ١$

(ملاحظة) بما أن علامة  $-$  قبل القوسين تؤثر في كل حد داخل فيهما لا ترفع الأقواس في أول

مسطر من الحل حتى تجرى عملية الضرب

(مثال ٢) لحل ٧ سر - ٥ = [سر - ٧ - (٣ - سر) ٦ - ٧] سر ٣ = ١ + سر  
نرفع الأقواس فيحدث أن

$$١ + سر ٣ = [سر - ٧ - ٦ + (٣ - سر) ٦ - ٧] سر$$

$$١ + سر ٣ = [سر - ٧ - ٦ + ٦ - ٣٠ + ٦ سر - ٦ + ٦] سر$$

$$١ + سر ٣ = ٧ سر - ٣٠ - ٦ + ٦ سر - ٦ + ٦$$

وبالنقل يحدث أن ٧ سر - ٥ = سر ٣ - ٣٠ - ٦ + ٦ سر - ٦ + ٦

وباختصار الحدود يحدث أن ٧ سر - ٥ = سر ٣ - ٣١ - ٦

$$٧ سر - ٥ = سر ٣ - ٣١ - ٦$$

### (تمارين ١٨)

[يحسن في حل التمارين الآتية أن يكون حل الستة عشر الأولى منها بتفصيل وتطويل بحيث تبين كل خطوة في العمل مع بيان البديهيات المبينة عليها أما باقي التمارين فيقتصر فيها على نقل الحدود من طرف إلى آخر ليختصر الحل]

حل المعادلات الآتية وحقق الحل في التمارين من ١ إلى ٢٠

$$(١) ٣ سر + ١٥ = سر + ٢٥$$

$$(٢) ٢ سر - ٣ = سر ٣ - ٧$$

$$(٣) ٣ سر + ٤ = ٥ (سر - ٢)$$

$$(٤) ٢ سر + ٣ = ١٦ - (٢ سر - ٣)$$

$$(٥) ٨ (سر - ١) + ١٧ (سر - ٣) = ٤ (٤ سر - ٩) + ٤$$

$$(٦) ١٥ (سر - ١) + ٤ (سر + ٣) = ٢ (٧ + سر)$$

$$(٧) ٥ سر - ٦ (سر - ٥) = ٢ (٥ + سر) + ٥ (سر - ٤)$$

$$(٨) ٨ (سر - ٣) - (٦ - ٢ سر) = ٢ (سر + ٢) - ٥ (سر - ٥)$$

$$(٩) ٧ (٢٥ - سر) - ٢ سر = ٢ (٣ سر - ٢٥)$$

$$(١٠) ٣ (١٦٩ - سر) - (٧٨ + سر) = ٢٩ سر$$

$$(١١) ٥ سر - ١٧ - ٣ سر + ٥ = ٦ سر - ٧ - ٨ سر + ١١٥$$

$$(١٢) ٧ سر - ٣٩ - ١٠ سر + ١٥ = ٣٣ سر - ٢٦$$

$$(١٣) ١١٨ - ٦٥ - ٦ سر = ١٢٣ - ٣٥ + ٢٠ سر$$

$$(١٤) ١٥٧ - ٢١ (سر + ٣) = ١٦٣ - ١٥ (سر - ٢)$$

$$(١٥) ١٧٩ - ١٨ (سر - ١٠) = ١٥٨ - ٣ (سر - ١٧)$$

$$(١٦) ٩٧ - ٥ (سر + ٢٠) = ١١١ - ٨ (سر + ٣)$$

$$(١٧) ٥ = [٢ + {سر - (٣ + سر)}]$$

$$(١٨) ٥ سر - (٣ سر - ٧) - (٤ - ٢ سر - ٦ سر - ٣) = ١٠$$

$$(١٩) ١٤ سر - (٥ سر - ٩) - (٤ - ٣ سر - ٢) = ٣٠$$



$(٥ - \text{سـ} ٦) - \text{سـ} ٣ = [\{٥ - \text{سـ} ٤\} - ٣] - ١٩ - \text{سـ} ٢٥ \quad (٢٠)$   
 $١٤ - (٣ + \text{سـ} ٢)(٣ + \text{سـ}) = (١ + \text{سـ} ٢)(١ + \text{سـ}) \quad (٢١)$   
 $٢٠ + (١ + \text{سـ})(٢ + \text{سـ}) ٢ - (١ + \text{سـ} ٢) \text{سـ} = (١ - \text{سـ} ٢) - (١ + \text{سـ}) \quad (٢٢)$   
 $(٥ + \text{سـ})(١ + \text{سـ} ٢) = ٨ + (٣ + \text{سـ})(١ + \text{سـ}) ٢ \quad (٢٣)$   
 $٢٤ - (٢ + \text{سـ})(١ + \text{سـ}) ٤ = (١ - \text{سـ} ٢) ٢ - (٢ + \text{سـ} ٣ - \text{سـ} ٢) ٦ \quad (٢٤)$   
 $٦٤ - (٤ - \text{سـ})(٣ + \text{سـ} ٥) - \text{سـ} ٤ = (٢٠ - \text{سـ} + \text{سـ} ٢) - (٤ - \text{سـ}) ٢ \quad (٢٥)$   
 $(١ - \text{سـ}) ١٥ - ٣٠ = (٩ + \text{سـ} ٦ - \text{سـ} ٢) - (٣ - \text{سـ})(١٥ + \text{سـ}) \quad (٢٦)$   
 $٦٦ = \{ (٩ - \text{سـ} ٤) ٧ - \text{سـ} ٣ \} ٥ - \text{سـ} ٢ \quad (٢٧)$   
 $٢٢ = [ \{ (\text{سـ} - ٢) ٤ - ٩ \{ ٣ - ٩ + \text{سـ} \} ٢ - (٧ - \text{سـ}) ٣ + (\text{سـ} - ٢) ٢٠ \} \quad (٢٨)$   
 $\cdot = [ \{ \text{سـ} - (\text{سـ} - ٥) ٣ - ٨ \{ ٢ - ٨ - \text{سـ} \} ] - ٢ + \text{سـ} \quad (٢٩)$   
 $٢٣ = [ \{ (٥ - \text{سـ}) ٣ - ١ \{ ٥ - \text{سـ} \} ٥ - (\text{سـ} ٦ - ٥) ٣ \} \quad (٣٠)$   
 $٨ + (١ + \text{سـ}) ٢ = (٣ + \text{سـ} ٢)(١ + \text{سـ}) \quad (٣١)$   
 $١٥ - \text{سـ} = (١ - \text{سـ} ٢) ٣ - (١ - \text{سـ} ٣) \quad (٣٢)$   
 $٧ + (٣ - \text{سـ}) ٦ = (٧ - \text{سـ} ٢)(١ + \text{سـ} ٣) \quad (٣٣)$   
 $١٦ - (٥ - \text{سـ}) ٢٥ - (٤ - \text{سـ}) \text{سـ} = ٢٥ + \text{سـ} ٨ - \text{سـ} ٢ \quad (٣٤)$   
 $٩ - (٤ + \text{سـ}) \text{سـ} + (٣ + \text{سـ})(٢ + \text{سـ}) = (٢ + \text{سـ})(١ + \text{سـ}) + (١ + \text{سـ}) \text{سـ} \quad (٣٥)$   
 $٢١ - (١ + \text{سـ} ٢) \text{سـ} = (٤ - \text{سـ})(٢ + \text{سـ}) ٢ \quad (٣٦)$   
 $٣٥ + (٢ + \text{سـ}) \text{سـ} ٣ = (٣ + \text{سـ}) ٢ + (١ + \text{سـ}) \quad (٣٧)$   
 $١٨٠ + (٥ - \text{سـ}) ٣ = (١ + \text{سـ} ٢) - (٥ + \text{سـ}) ٤ \quad (٣٨)$   
 $(٣ + \text{سـ})(٢ + \text{سـ})(١ + \text{سـ}) = (٥ + \text{سـ})(٣ - \text{سـ})(٤ + \text{سـ}) + ٨٤ \quad (٣٩)$   
 $(١ - \text{سـ} ٧) ٤ + \text{سـ} ٩ + \text{سـ} ٣ = (٦ + \text{سـ})(٢ + \text{سـ})(١ + \text{سـ}) \quad (٤٠)$

بند ٧٥ - من الأمثلة الآتية يتضح أحسن الطرق لحل المعادلات التي تشتمل على معاملات كثيرة

(مسألة ١) حل

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1 - 2}{x - y} = \frac{-1}{x - y} = \frac{1}{y - x}$$

نضرب طرفي المعادلة في ٨٨ وهو المضاعف المشترك البسيط للقامات فيحدث أن

$$44 - 24 = (9 - 2) 11 - 202$$

ثم رفع الأقواس فيحدث أن

$$22 - 2 = 99 + 11 = 110$$

وبالنقل يحدث أن

وباختصار الحدود المتشابهة وتغيير العلامات يحدث أن

$$490 = 5 \cdot 10$$

۴۴ = ۳۵

(ملاحظة) شرطه الكسر في الحد -  $\frac{1-s}{1}$  تقوم مقام قوس لأن  $\frac{1-s}{1}$  عين

— ۱/۸ (سہ - ۹) (راجعہ بند ۵۸)

بند ٧٦ - يحسن في بعض الأحيان أن لا تضرب الطرفين في المضاعف المشترك البسيط للمقامات وذلك متى أمكن إزالة الكسور في خطوتين أو ثلاث خطوات كما في المثال الآتي

$$(مثال ٢) \quad \frac{٩+س}{٢٨} - \frac{٣٢-س}{٩} = \frac{٣-س}{٣٥} + \frac{٤-س}{٣}$$

إضرب الطرفين في ٩ فيحدث أن

$$\frac{٨١+٩س}{٢٨} - ٣٢ - س = \frac{٢٧-٩س}{٣٥} + ١٢ - ٣س$$

$$\text{وبالنقل يحدث أن} \quad ٢٠ - س = \frac{٨١+٩س}{٢٨} + \frac{٢٧-٩س}{٣٥}$$

ثم نحذف المقامات بأن نضرب الطرفين في  $٥ \times ٧ \times ٤$  أي في ١٤٠ فيحدث أن

$$٢٨٠٠ - ١٤٠س = ٤٠٥ + ١٠٨ + ٤٥س + ١٠٨ - ٢٨٠٠$$

$$\therefore \quad ٢٨٠٠ - ١٤٠س = ٤٠٥ + ١٠٨ - ٢٨٠٠ + ٤٥س$$

$$\therefore \quad ١٦٣س = ٣٠٩٧$$

$$\therefore \quad ١٩ = س$$

بند ٧٧ - إذا كانت المعاملات في معادلة ما كسورا عشرية يمكن تحويل هذه المعاملات إلى كسور اعتيادية ثم اتباع ما سبق في طريق الحل وإن كان يحسن غالبا أن تبقى الكسور العشرية كما هي

$$(مثال ١) \quad \frac{١}{٣} - س + ٠,٢٥ = \frac{١}{٤} - س = ١,٨ - س + ٠,٧٥ - س - \frac{١}{٣}$$

نحول الكسور العشرية إلى اعتيادية فيحدث أن

$$\frac{١}{٣} - س + \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٤} - س = ١\frac{٨}{١٠} - س = \frac{٢}{٣} - س - \frac{١}{٣}$$

$$\text{وبحذف المقامات نجد أن} \quad ٢٤ + س = ٩ - س = ٤ - س = ٢٧ - س - ١٢$$

$$\text{وبالنقل يحدث أن} \quad ٢٤ - س = ٤ + س = ٢٧ + س = ٢٧ - س - ١٢ - س$$

$$\text{وباختصار الحدود المتشابهة يحدث أن} \quad ٤٧ = س$$

$$\therefore \quad ١ = س$$

$$(مثال ٢) \quad \text{لحل} \quad ٠,٣٧٥ - س = ١,٨٧٥ - س + ٠,١٢ = ١,١٨٥ + س$$

$$\text{نقل الحدود فيحدث أن} \quad ٠,٣٧٥ - س = ٠,١٢ - س = ١,١٨٥ + س$$

$$\text{وبالاختصار يحدث أن} \quad (٠,٣٧٥ - ٠,١٢) - س = ١,٣٠٦$$

$$\text{أو} \quad ٠,٢٥٥ - س = ١,٣٠٦$$

$$\therefore \quad \frac{٣,٠٦}{٠,٢٥٥} = س$$

$$١٢ =$$

# (تمارين ٨ ب)

حل المعادلات الآتية وحقق نتيجة كل من الست عشرة الأولى منها

$$\begin{array}{l} ٦ = \frac{٣٢}{٧} + \frac{٢٠ + ٣}{٩} \quad (٩) \\ ٠ = \frac{٥}{٢١} + \frac{٣ - ٣}{٣} + \frac{٨ - ٣}{٧} \quad (١٠) \\ \frac{٢ + ٣}{٤} = \frac{١ + ٣}{٩} - \frac{٥ + ٣}{٦} \quad (١١) \\ \frac{١٢}{٤٢} = \frac{٣ - ١}{٣} - \frac{٣ - ٤}{٦} \quad (١٢) \\ ٥ \frac{١٩}{٢٨} = \frac{(٣ - ٣)٢}{٧} - \frac{(٥ + ٣)٥}{٨} \quad (١٣) \\ ١٢ = \frac{(٧ - ٣)٦}{٧} - \frac{(٢ + ٣)١٤}{٣} \quad (١٤) \\ ٤ \frac{١}{٢} - \frac{٣ - ٢}{٤} = \frac{٣}{٣} - \frac{٣}{٢} + ١ \quad (١٥) \\ ٧ \frac{٥}{٩} = \frac{٣}{٥} + \frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٣} + \frac{٣}{٢} \quad (١٦) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ١٠ = \frac{٥ - ٣}{٣} + \frac{٣}{٤} \quad (١) \\ ٥ = \frac{٥ + ٣}{٥} + \frac{٥ - ٣}{١٠} \quad (٢) \\ ٥ = \frac{١٠ + ٣}{٩} + \frac{٢ - ٣}{٥} \quad (٣) \\ \frac{٣}{٤} + ٣ = \frac{١٩ + ٣}{٥} \quad (٤) \\ \frac{١٠ - ٣}{٥} = \frac{٤ - ٣}{٧} \quad (٥) \\ \frac{١ + ٣}{١٨} + ١ = \frac{١ - ٣}{٨} \quad (٦) \\ \frac{٣}{١٣} + ٧ = \frac{(٢ + ٣)٤}{٥} \quad (٧) \\ ٢ = \frac{٤ - ٣}{٦} + \frac{٤ + ٣}{١٤} \quad (٨) \end{array}$$

$$\frac{٥}{٤٨} + (٦ - ٣) \frac{٢}{٥} = (٤ - ٣) \frac{٥}{١٧} - (١ - ٣) \frac{٢}{١١} \quad (١٧)$$

$$١٤ \frac{١}{٢} - ٣ = (٨ - ٣) \frac{١}{٧} - (٧ - ٣) \frac{٥}{٢} + ٣ \quad (١٨)$$

$$٤ \frac{٢}{٤} - \frac{٧ - ٣}{٥١} = (٣ - ٣) - (١٠ + ٣) \frac{١}{١٧} - \frac{٣ - ٢}{٤} \quad (١٩)$$

$$٣٤ + (٢٥ - ٣) \frac{٢}{٧} = (١١ - ٣) \frac{١}{١٤} - \frac{٣ - ٧}{٥} \quad (٢٠)$$

$$\left( \frac{٣}{٢} - ١١ \right) \frac{١}{٢} + \frac{٥}{٩} - \left( \frac{٣}{٢} - ٤ \right) \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} + ٣ \quad (٢١)$$

$$٨ \frac{٣ - ٢٣}{٥} - ٧ = \frac{١ - ٣}{٧} + \frac{٣ + ٤}{٤} + (٨ - ٣) \frac{١}{٥} \quad (٢٢)$$

$$٨ \frac{٢ + ٣}{٣} - \frac{١٢ - ٣}{٥} = \frac{٣ - ٥}{٤} - \frac{٣ - ٥}{٦} + (٣ - \frac{٣}{٤}) \frac{١}{٢} \quad (٢٣)$$

$$٨ \frac{٥}{٢} - (٥٧ - ٣) \frac{١}{٩} = \left( \frac{٥ - ٣}{١٠} - ٣ \right) - ٣ \quad (٢٤)$$

$$٣ \frac{٢ - ٣}{٣} - ١ - ٣ = ٤ \frac{٢}{٤} + \frac{١٠ + ٣}{٥} - \frac{٣}{٤} \quad (٢٥)$$

$$١٢ : ٣ = ١ - ٣ \quad ٨ \quad ١ - ٣ = ٣ \quad ٣ - ٣ = ٣ \quad (٢٦)$$

$$\frac{٣}{٥٢} - ٧ = \frac{٣}{٥٥} + ٣ \quad (٢٧)$$

$$٢,٧٥ + ٣ = ٠,١٢٥ - ٣,٢٥ \quad (٢٨)$$

$$٨,٣ - ٠,٦ = ٣,١٩ - ٣ \quad (٢٩)$$

$$٠ = ١٥ + ٣,٨٧٥ - ٣,٧٥ + ٣,٧ - ٣,٦ \quad (٣٠)$$

$$(٣١) \quad ٤٧ = \{ ١٢ - ٣ - ٢٥ - (٣ - ٤) - (٥ + ١٤) \}$$

$$(٣٢) \quad ١٩ - ٥ = \frac{(٣ - ٤) + (٢ - ٣) + (٤ - ٥)}{١٢}$$

$$(٣٣) \quad ١٥ = \frac{٣ - ٢٥}{١٢} - \frac{٢٥ + ٣}{١٢}$$

$$(٣٤) \quad ٣ - ٣ = ٣ - ٢٥ + ٢٥ - ٣$$

$$(٣٥) \quad ١٥ - ٣ = ٢٥ - ٣ - ٣ - ١٥$$

$$(٣٦) \quad ١٥ = \frac{٢٣٦}{١٢} - \frac{١٨ - ٩}{١٢}$$

(وسمائي على بعض أمثلة أخرى لحل المعادلات البسيطة تحت عنوان أسئلة متنوعة ٢ (صفحة ٩٠)

بند ٧٨ - قبل أن نتم هذا الباب يحسن لفت نظر التلميذ إلى الأحوال الآتية التي يجب أن يكون

على يقينة منها لكثرة ورود ما يمثّلها في حل المعادلات حتى يتمكن من إيجاد الحل بمجرد النظر

$$(١) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{٤}{٣} = \frac{٧}{٥} \quad \text{لنفرض أن} \\ \frac{٥ \times ٤}{٣} = ٧ \cdot ٥ \quad \text{فبضرب الطرفين في ٥ يحدث أن} \\ \frac{٥ \times ٤}{٧ \times ٣} = ٥ \quad \therefore \end{array} \right.$$

$$\frac{٤}{٧} = \frac{٥}{٣} \quad \text{لنفرض أن}$$

فبضرب كلا من الطرفين في ٣ مره فيحصل أن

$$(٢) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{٣ \times ٩}{٧} = ٥ \\ ٣ \cdot ٩ = ٧ \times ٥ \\ ٣ = \frac{٧ \times ٥}{٩} \quad \therefore \end{array} \right. \quad \text{أو}$$

وبالتأمل في النتيجتين (١) و (٢) نستنتج القاعدة الآتية

يمكن نقل أحد العوامل التي في بسط أحد طرفي أي معادلة إلى مقام الطرف الآخر منها

وكذلك يمكن نقل أحد العوامل التي في مقام أحد طرفي أي معادلة إلى بسط الطرف الآخر منها

وتظهر فائدة تطبيق هذه القاعدة جليا في المثالين الآتيين

$$\frac{٩}{٣٥} = \frac{٣}{١٤} \quad \text{(مثال ١) إذا كان}$$

$$١ \frac{١}{٥} = \frac{١٤ \times ٩}{٣ \times ٣٥} = \frac{٢}{٥} \quad \text{فكوب}$$

$$٥ - = \frac{٢}{٥} \quad \text{(مثال ٢) إذا كان}$$

$$٥ - = \frac{٢}{٥} \quad \text{فيكون}$$

$$\frac{٢}{٥} - = ٥ \quad \therefore$$

وبعد تبون قليل يجب إجراء العمليات الحسابية عقلا وإذن يستغنى عن الإجراءات الموصلة للنتيجة

## (تمارين ٨٠)

أوجد مقدار سـ في كل من المعادلات الآتية

$\frac{9}{س-5} = \frac{36}{150} \quad (١٥)$	$\frac{1}{4} - = \frac{س-4}{12} - (٨)١$	$\frac{3}{4} = \frac{2}{س} \quad (١)$
$\frac{1٥}{س-2} = \frac{5}{8} \quad (١٦)$	$\frac{2٥}{17} = \frac{5}{س-3} \quad (٩)$	$\frac{س}{12} = \frac{2}{7} \quad (٢)$
$\frac{9}{42} = \frac{س}{18} \quad (١٧)$	$\frac{1}{3} - = \frac{5}{س-2} \quad (١٠)$	$\frac{3}{س} = \frac{2}{5} \quad (٣)$
$\frac{16}{17} = \frac{4}{س-3} \quad (١٨)$	$\frac{س-6٥}{84} = \frac{13}{11} \quad (١١)$	$2 = \frac{س}{3} - (٤)$
$\frac{7}{س-2} = \frac{49}{1٥} \quad (١٩)$	$\frac{1}{س-3} = \frac{7}{7} - (١٢)$	$\frac{29}{٥1} = \frac{س}{17} \quad (٥)$
$\frac{س-8}{3} = \frac{٥6}{1٥} \quad (٢٠)$	$\frac{س}{4} = \frac{2}{8} \quad (١٣)$	$\frac{8}{٤٥} = \frac{س-2}{1٥} \quad (٦)$
$\frac{٥٧}{49} = \frac{س-19}{7} \quad (٢١)$	$\frac{4}{7} - = \frac{8}{س-21} \quad (١٤)$	$\frac{1}{8} - = \frac{3}{س-7} \quad (٧)$

## الباب التاسع - التعبير بالرموز

بند ٧٩ - تنشأ أكبر صعوبة يلاقيها المبتدئ في حل المسائل الجبرية من استعمال الرموز بدلا من الأرقام التي تعود استعمالها في الحساب . فقد يوجب السؤال ارتباكاً وحيث إذا أرد التعبير عنه برموز جبرية مع أنه قد يكون في غاية البساطة إذا وضع في قالب حسابي فإذا طلب من المتعلم أن يجيب عن سؤال ما العدد الذي يزيد على سـ مقدار ١ ربما عجز عن معرفة الجواب مع أنه قد يجيب بسرعة عن سؤال يضاهيه من علم الحساب مثل ما العدد الذي يزيد على ٥٠ مقدار ٦ ولكن معرفة الجواب عن السؤال الحسابي قد ترشده إلى معرفة الجواب عن السؤال الجبري فكذا أن العدد الذي يزيد على ٥٠ مقدار ٦ هو ٥٠ + ٦ كذلك العدد الذي يزيد على سـ مقدار ١ هو سـ + ١

بند ٨٠ - ربما كانت الأمثلة الآتية أجسناً مقدمة لهذا الباب وبعد المثال الأول منها يترك للتعلم اختيار في الاستعانة بالحساب إذا رأى ضرورة لذلك

(مثال ١) كم تريد سـ على ١٧

فإذا وضعنا المطلوب في قالب حسابي كان نقول كم تريد ٢٧ على ١٧

يكون الجواب بالبداية ١٠ وهذا يساوي ٢٧ - ١٧

فأذن زيادة سـ على ١٧ هي سـ - ١٧

وبالطريقة عينها يكون نقص سـ عن ١٧ هو ١٧ - سـ

(مثال ٢) إذا كانت سـ أحد جزأي ٤٥ فالحزء الآخر ٤٥ - سـ

(مثال ٣) إذا كانت سـ أحد عاملي ٤٥ فالعامل الآخر  $\frac{45}{س}$

(مثال ٤) ما المسافة التي يقطعها رجل في ١ من الساعات إذا قطع ٤ كيلومترات في الساعة

نقول بما أنه يقطع في الساعة الواحدة ٤ كيلومترات يقطع في ١ من الساعات قدر ما يقطعه في الساعة الواحدة ١ من المرات أى ٤ ١ من الكيلومترات

(مثال ٥) إذا قسم ٢٠ جنبها بالتساوى بين صه من الأشخاص فنصيب كل منهم المبلغ مقسوما على عددهم أى  $\frac{20}{صه}$  من الجنيهات

(مثال ٦) إذا قسم ١٧ على ٦ فالخارج ٢ والباقي ٥

أى أن  $\frac{17}{6} = ٢ + \frac{5}{6}$

فالذا قسمنا ٥ على ٢ وكان الخارج ٢ والباقي ١

كان  $\frac{5}{2} = ٢ + \frac{1}{2}$

أو  $٥ = ٢م + ١$

فالذا كان المقسوم عليه صه والخارج صه والباقي ع فالمقسوم = صه صه + ع

(مثال ٧) رجل معه مبلغ يعادل ط من الجنيهات في جيب وآخر يعادل ع من القروش

في جيب آخر فأخذ صه من الجنيهات من الجيب الأول ووضعها في الجيب الثانى لها مقدار ما صار في كل جيب مقدرا بالقروش

بدى أن ما أضيف إلى الجيب الثانى يساوى ما أخذ من الجيب الأول

∴ الجيب الأول صار به ١٠٠ (ط - صه) من القروش

و الجيب الثانى صار به ع + ١٠٠ صه من القروش

### (تمارين ١٩)

(١) ما الكمية التى يجب أن نضم إلى صه حتى ينتج صه

(٢) فى أى كمية يجب ضرب ٣ ليكون الناتج ١

(٣) ما المقسوم إذا كان الخارج ب والمقسوم عليه ٥

(٤) بكم ينقص ٢ عن ٣

(٥) ما الذى تزيده ٣ ك على ك

(٦) إذا قسمت ١٠٠ إلى جزأين أحدهما صه فما الآخر

(٧) إذا كانت ١ أحد عاملى ب فما العامل الآخر

(٨) ما العدد الذى ينقص بمقدار ٢ عن ٢٠

(٩) ما ثمن ١ من البرتقال (بالقروش) إذا كان ثمن كل اثنتى عشرة منه ٤ قروش

(١٠) ما ثمن ١٠٠ برقالة (بالقروش) إذا كان ثمن صه منه قرشين

(١١) الفرق بين عددين ١١ وأصغرهما صه فما أكبرهما

(١٢) مجموع عددين ٢٠ وأحدهما صه فما الآخر

(١٣) ما الذى تزيده ٩٠ على صه

(١٤) ما الذى تزيده صه على ٣٠

(١٥) إذا اشتملت ١٠٠ على صه خمس مرات فما قيمة صه

- (١٦) ما من أربعين كتابا بالجنينة المصرية إذا كان ثمن الكتاب  $\text{سـ}$  من القروش  
يصير عمر رجل بعد  $\text{سـ}$  من السنين ٣٦ سنة فما عمره الآن  
(١٧) ما عمر رجل بعد ١ من السنين إذا كان عمره الآن  $\text{سـ}$  من السنين  
(١٨) إذا حصد  $\text{سـ}$  من الرجال مزرعة في ٥ أيام ففى كم يوم يحصد رجل  
(١٩) ما قيمة  $\text{سـ}$  إذا كان ٥  $\text{سـ}$  يساوى ٢٠  
(٢٠) ما من ١٢٠ نفاحة بالقروش إذا كان ثمن كل ٢٠ نفاحة منها  $\text{سـ}$  من القروش  
(٢١) كم ساعة تزم لقطع  $\text{سـ}$  من الكيلومترات إذا كانت السرعة ٦ كيلومترات في الساعة  
(٢٢) ما المسافة التي أقطعها في  $\text{سـ}$  من الساعات بسرعة  $\text{صـ}$  من الكيلومترات في الساعة  
(٢٣) مشى رجل  $\text{صـ}$  من الكيلومترات في  $\text{سـ}$  من الأيام فما المسافة التي يقطعها في اليوم  
(٢٤) كم دقيقة تزم لقطع  $\text{سـ}$  من الكيلومترات إذا كانت السرعة ١ من الكيلومترات في الساعة  
(٢٥) سرعة قطار  $\text{سـ}$  من الأميال في الساعة فما الزمن الذي يقطع فيه المسافة من القاهرة  
إلى الاسكندرية وهي ١٣٠ ميلا  
(٢٦) ما المسافة بين بلدين مقسمة بالكيلومترات إذا كان القطار الذي يسير ط من الكيلومترات  
في الساعة يقطعها في ٥ ساعات  
(٢٧) ما السرعة بالسنتيمترات في الثانية لقطار يسير ٣٠ كيلومترا في  $\text{سـ}$  من الساعات  
(٢٨) رجل معه ١ من الريالات ٦ ب من أنصافها فكم قرشا معه  
(٢٩) إذا صرفت  $\text{سـ}$  من القروش من ٢٠ جنيا انجليزية فكم قرشا يبقى معي  
(٣٠) رجل صرف ٥ من البنسات من كيس فيه ١ من الجنيهات الانجليزية ٦ ب من الشلنات  
فكم بنسا بقيت معه  
(٣١) كم تزيد ٢  $\text{سـ}$  — ٥ على  $\text{سـ}$  + ١  
(٣٢) ما العدد اللازم طرحه من ١ — ٢ ب ليكون باقي الطرح ١ — ٣ ب  
(٣٣) اشترك  $\text{سـ}$  من الأشخاص في دفع مبلغ بالتساوى فدفع كل ٤٠ قرشا فما مقدار المبلغ بالقروش  
(٣٤) إذا تصدقت بمقدار  $\text{خـ}$  من القروش من كيس فيه ١ من الجنيهات ٦ ب من الريالات  
فكم قرشا يبقى معي  
(٣٥) في كم اسبوع يأكل  $\text{سـ}$  من الخيل مائة بكلة شعير إذا كان الحصان الواحد يأكل  $\text{صـ}$  من  
الكيلات في الاسبوع  
(٣٦) إذا كنت اصرف  $\text{سـ}$  من القروش في الاسبوع فكم جنيا اقتصد من إيراد سنوى قدره  
 $\text{صـ}$  من الجنيهات  
(٣٧) رف عليه  $\text{سـ}$  من الكتب العربية ٦  $\text{صـ}$  من الكتب الفرنسية ٦ ع من الكتب  
الانجليزية فما عدد الكتب الموضوعة بلغات أخرى إذا كان ما على الرف ١٠٠ كتاب  
(٣٨) معي  $\text{سـ}$  من الجنيهات في جيب ٦  $\text{صـ}$  من أنصاف الريالات في آخر ٦ ع من القروش  
في ثالث فما يبقى معي بالقروش بعد أن أتصدق بمبلغ ١٢ قرشا  
(٣٩) مكتب فيه  $\text{سـ}$  من التلاميذ نبغ  $\text{صـ}$  منهم في الاديبيات ٦ ع في الرياضيات ولم ينبغ  
الباقون في شيء فكم مقدار زيادة التابضين على غير التابضين

- بند ٨١ - ثلث الآن بيض أمثلة أصعب من السابقة مع شرح طريقة حلها بدون اختصار  
(مثال ١) يصير عمر رجل بعد  $s$  من السنين قدر عمر ابنه  $m$  من المرات فلما عمر الرجل  
الآن مع العلم بأن عمر الابن في الوقت الحاضر  $s$  من السنين  
حل هذه المسألة يقول إنه بعد  $s$  من السنين يصير عمر الابن  $s + s$  من السنين  
ويكون عمر الابن وقتئذ  $m (s + s)$  من السنين  
فاذن عمر الابن الآن  $m (s + s) - s$  من السنين  
(مثال ٢) ما الرجب البسيط لمبلغ  $m$  من الجنيهات في  $d$  من السنين بسعر  $c$  في المائة  
لذلك قول إن رجب  $100$  جنيه لمدة سنة  $c$  من الجنيهات  
فيكون رجب جنيهه لمدة سنة  $\frac{c}{100}$  من الجنيهات  
ويكون رجب  $m$  من الجنيهات لمدة سنة  $\frac{c}{100}$  من الجنيهات  
ويكون رجب  $m$  من الجنيهات في  $d$  من السنين  $\frac{cd}{100}$  من الجنيهات  
(مثال ٣) طول قامة  $u$  من البارادات وعرضها  $h$  من الأقدام وارتفاعها  $c$  من الأقدام  
فيكم ياردة مربعة من البساط تفرش أرضها وبكم ياردة مربعة من الورق تكمي جدرانها  
(١) مساحة الأرض  $= 3u$  هـ من الأقدام المربعة  
اذن عدد البارادات المربعة اللازمة من البساط  $= \frac{3u}{9} = \frac{u}{3}$   
(٢) محيط القاعة  $= 2(u + 3u) = 8u$  هـ من الأقدام  
∴ سطح الجدران  $= 2(u + 3u) = 8u$  هـ من الأقدام المربعة  
∴ عدد البارادات المربعة اللازمة من الورق  $= \frac{8u}{9} = \frac{8u}{9}$  هـ  
(مثال ٤) أرقام عدد متبادلة من اليمين  $6$  ب  $6$  ا فما العدد  
لذلك نقول إن  $c$  رقم الآحاد لوقوعه في خانة الآحاد  $6$  ب رقم العشرات لوقوعه في خانة العشرات  
 $6$  ا رقم المئات لوقوعه في خانة المئات فالعدد اذن  $= 1$  من المئات  $6$  ب من العشرات  $6$  ح  
من الآحاد ويكون هو  $100 + 10 + 6 = 116$   
واذا قلب وضع الأرقام تكون عدد آخر يل عليه بالرموز هكذا  
 $100 + 10 + 1 = 111$   
(مثال ٥) ما حاصل جمع ثلاثة أعداد متتالية أصغرها  $u$  ثم ما حاصل ضربها  
العددان التاليان للعدد  $u$  هما  $u + 1$  و  $u + 2$   
∴ مثل جمع الأعداد الثلاثة  $= u + (u + 1) + (u + 2) = 3u + 3$   
وحاصل ضربها  $= u(u + 1)(u + 2)$   
(ملاحظة) يمكن أن يرمز لأي عدد زوجي بالكتابة  $2u$  التي فيها  $u$  أي عدد صحيح  
موجب لأن  $2u$  تقبل القسمة على  $2$  دائماً وأي عدد فردي يمكن أن يرمز له بالكتابة  $2u + 1$   
لا هذا العدد لو قسم على  $2$  كان الباقي واحداً دائماً



(مثال ٦) كم يوما يحصد فيها رجال عددهم ١ أفدنة عددها ب مع العلم بأن ح من الأولاد يحصدون ١ من الأفدنة في ب من الأيام وشغل كل رجل يعادل شغل ح من الأولاد لذلك نقول

بما أن ح من الأولاد يحصدون ١ من الأفدنة في ب من الأيام

∴ الولد يحصد ١ » في ب ح »

∴ ح من الأولاد ( أى الرجل الواحد ) يحصدون ١ من الأفدنة في  $\frac{ب}{ح}$  من الأيام

∴ ١ من الرجال يحصدون ١ من الأفدنة في  $\frac{ب}{ح}$  من الأيام

∴ ١ » » فداناً في  $\frac{ب}{ح}$  »

∴ ١ » » ب من الأفدنة في  $\frac{ب}{ح}$  »

(تمارين ٩ ب)

- (١) أكتب أربعة أعداد متتالية أصغرها سه
- (٢) أكتب ثلاثة أعداد متتالية أكبرها سه
- (٣) أكتب خمسة أعداد متتالية أوسطها سه
- (٤) ما العدد الزوجي التالي للعدد ٢
- (٥) ما العدد الفردي الذي يليه العدد ٢ سه + ١
- (٦) ما مجموع ثلاثة الأعداد الفردية المتتالية التي أوسطها ٢ + ١
- (٧) سار رجل سه من الكيلومترات قطع منها ١ من الكيلومترات بالعربة ٦ ب من الكيلومترات بالقطار ثم أتمها في سفينة فما المسافة التي قطعها بالسفينة
- (٨) يأكل حصان ١ من الكيلات من الحبوب في الأسبوع ويأكل حمار ب من الكيلات من الحبوب في الأسبوع فكم كيلة يأكلانها في ح من الأسابيع
- (٩) إذا كان عمر رجل منذ ه سنين سه من السنين فكم سنة يصير عمره بعد أن يمضي من الآن سه من السنين
- (١٠) عمر ولد سه من السنين وبعد ه سنين يصير عمره نصف عمر أبيه وقتئذ فما عمر أبيه الآن
- (١١) رجل كان عمره منذ سه من السنين قدر عمر طفل م من المرات وكان عمر الطفل وقتئذ سه من السنين فما عمر الرجل الآن
- (١٢) عمر أحمد ضعف عمر محمود وعمر محمود ٣ أمثال عمر مصطفى وعمر مصطفى سه من السنين فما عمر أحمد
- (١٣) ما ربح ١٠٠٠ جنيه في ب من السنين بسعر ه /
- (١٤) ما ربح سه من الجنيئات في ١ من السنين بسعر ه /
- (١٥) ما ربح ٥٠ ١ من الجنيئات في ١ من السنين بسعر أ /
- (١٦) ما ربح ٢٤ سه سه من الجنيئات في سه من الأشهر بمعر سه في المائة في السنة

- (١٧) طول قاعة  $\alpha$  من الأمتار وعرضها  $\beta$  من الديسمترات فما مساحة أرضها بالأمتار المربعة
- (١٨) قاعة مربعة طول ضلعها  $\alpha$  من السنتيمترات فكَمَ متراً مربعاً من البساط تلازم لفرضها
- (١٩) طول قاعة  $\alpha$  من الديسمترات وعرضها  $\beta$  من الأمتار فكَمَ متراً من البساط الذي عرضه  $\frac{1}{2}$  المتر عرض
- (٢٠) كم يتفق بالجانب المصري على فرش قاعة بالبساط إذا كان طولها  $\alpha$  من الأمتار وعرضها  $\beta$  من الديسمترات مع العلم بأن ثمن المتر المربع  $\gamma$  من القروش
- (٢١) كم ياردة من البساط الذي عرضه  $\alpha$  من البوصات تلازم لفروش قاعة طولها  $\beta$  من الأقدام وعرضها  $\gamma$  من الأقدام
- (٢٢) طول قاعة  $\alpha$  من الأمتار وعرضها  $\beta$  من الأمتار وفي وسطها بساط مربع طول كل من أضلاعه  $\gamma$  من الأمتار فكَمَ متراً مربعاً من المشمع يفرض ما بقى من القاعة
- (٢٣) كم كيلومتراً يمشي شخص في ٤٥ دقيقة إذا كان ما يقطعه في  $\alpha$  من الساعات  $\beta$  من الكيلومترات
- (٢٤) ما الزمن الذي يقطع فيه شخص  $\alpha$  من الكيلومترات إذا كان ما يقطعه في  $\beta$  من الساعات  $\gamma$  كيلومتراً
- (٢٥) إذا قطع قطار  $\alpha$  من الكيلومترات في  $\beta$  من الساعات فكَمَ سنتيمتراً يقطع في الثانية
- (٢٦) قطار يسير بسرعة  $\alpha$  من السنتيمترات في الثانية فكَمَ كيلومتراً يقطعها في  $\beta$  من الساعات
- (٢٧) ما الزمن الذي يحصد فيه  $\alpha$  من الرجال  $\beta$  من الأقدنة إذا كان ما يحصده الرجل في اليوم  $\gamma$  من الأقدنة
- (٢٨) كم رجلاً يجزون في  $\alpha$  من الساعات ما يجزئه  $\beta$  من الرجال في  $\gamma$  من الساعات
- (٢٩) ما السرعة في المائة الذي يأتى منه درج قدره  $\alpha$  من الجنيهات لمبلغ  $\beta$  من السنين  $\gamma$  من السنين
- (٣٠) ما الزمن الذي ينتج فيه مبلغ  $\alpha$  من الجنيهات ربها قدره  $\beta$  من الجنيهات بسعر  $\gamma$  في المائة في السنة
- الأمثلة الآتية تساعد التلميذ على وضع فروض المسائل على هيئة معادلات
- (٣١)  $\alpha$  حاصل ضرب ثلاثة أعداد متتالية أكبرها  $\beta$  بين ذلك بمعادلة
- (٣٢) مجموع ثلاثة أعداد زوجية متتالية  $\alpha$  وأوسطها  $\beta$  بين ذلك بمعادلة
- (٣٣) حاصل ضرب  $\alpha$   $\beta$  خمسة أمثال باقي طرح  $\gamma$  من  $\alpha$  بين ذلك بمعادلة
- (٣٤) خارج قسمة  $\alpha$  على  $\beta$  يزيد على مجموع  $\alpha$   $\beta$  بعشرة بين ذلك برموز جبرية
- (٣٥) عمر رجل يزيد على عمر ابنه  $\alpha$  من السنين وعمر الابن الآن  $\beta$  من السنين وبعد  $\gamma$  سنين يصير عمر الأب ضعف عمر ابنه بين ذلك برموز جبرية وإذا كان عمر الابن الآن  $\alpha$  سنة فما عمر الأب الحالي وإذا كان عمر الوالد الآن  $\beta$  سنة فما عمر ابنه الحالي
- (٣٦) أحمد معه  $\alpha$  من الجنيهات ومحمد معه  $\beta$  من القروش فأعطى أحمد محمد  $\gamma$  من الجنيهات ووجد أن ما بقى معه يساوى ثلاثة أمثال ما مع محمد بين ذلك بمعادلة
- (٣٧) رجل عمره  $\alpha$  من السنين وله ولد عمره  $\beta$  من السنين ومنذ  $\gamma$  سنين كان عمر الوالد سبعة أمثال عمر ابنه بين ذلك برموز جبرية

## القوانين

بند ٨٢ - برهنا في مثال ٦ بند ٨٠ على أن  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} + \frac{2}{3}$  وهي نتيجة تبين بطريقة عامة مختصرة الارتباط بين المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة وباقيها وهذا مثال لنوع عام من الصور الجبرية المسماة بالقوانين التي سنشرح فيما يلي فائدتها وتطبيقاتها بالايجاز (تعريف) القانون ارتباط ثبت بالبرهان بين كميات معينة يمكن اعتبار أيها مجهولا فإذا فرض في القانون السابق أن  $6 = 6$  ب ٦ م كميات معلومة آل الأمر إلى معادلة يمكن استخراج منها  $6 = 6$  وهالك مثلا لبيان استعمال هذا القانون ما العدد الذي إذا قسم عليه ٩٦ كان الخارج ٥ والباقي ١١ فالمعلومات هنا هي  $96 = 6 \times 16 + 0$  فيوضع المتغيرات بدل الحروف يحدث

$$\frac{11}{6} + 0 = \frac{96}{6}$$

ومنها ينتج أن  $16 = 17$  وهو المقسوم عليه

بند ٨٣ - للاحظ أن القانون يشمل كل الأحوال الخصوصية منحصرة في عبارة واحدة عامة فاستعمال قانون جبري واحد تمكن من أن نين بالاختصار جملة نتائج مرتبطة بعضها ببعض في صورة نرى بساطتها لأول وهلة ويسهل تذكرها وتطبيقها

وسيعلم التلميذ بالتجربة عند تطبيق هذه القوانين ما تعلم الجبر من الفائدة في تسهيل حل مسائل كثيرة متنوعة وأنه وإن كان لا يسهل المقام هنا سوى التاميح لفروع الرياضة الأخرى والعلوم الطبيعية ربما كان من المفيد لأهمية الموضوع وفائدته توجيه نظر الطالب إلى بعض القوانين الجبرية البسيطة التي ربما تصادفه فيما يدرسه من العلوم الأخرى

(١) إذا كانت  $6$  قاعدة مثلث  $6$  ع ارتفاعه يمكن إيجاد مساحته  $6$  من القانون

$$6 = \frac{1}{2} \times 6 \times 6$$

(٢) إذا كانت مساحة قاعدة هرم  $6$  وارتفاعه  $6$  يمكن إيجاد حجمه  $6$  من القانون

$$6 = \frac{1}{3} \times 6 \times 6$$

وإذا كانت وحدة الطول المختارة في الحالتين السابقتين السنتيمتر أو المتر أو القدم أو ... .. كانت الوحدات الناتجة في الحاصل سنتيمترات أو أمتارا أو أقداما أو ... .. مرة في حالة المثلث أو سنتيمترات أو أمتارا أو أقداما أو ... .. مكعبة في حالة الهرم وفي القانونين السابقين متى علمت اثنتان من ثلاث الكميات سهل الحصول على الثالثة المجهولة بالحساب فمثلا إذا كان طول ضلع قاعدة هرم الجيزة الأكبر  $764$  قدما وارتفاعه  $480$  قدما وأريد معرفة حجم الحجارة التي استعملت في بنائه مقدرة بالأقدام المكعبة مع العلم بأن قاعدة الهرم مربع تقول

$$6 = \frac{1}{3} \times (764)^2 \times 480$$

$$6 = 764 \times 764 \times 160$$

$$6 = 93391360 \text{ قدما مكعبا}$$

بند ٨٤ - قد أوردنا في هذا الباب أمثلة كثيرة تتضمن المسافة والسرعة والزمن وكلها تحل بالاستنتاج البسيط بلا مشقة وهي في الحقيقة حالات خصوصية للقانون العام  $س = \frac{ر}{ز}$  الذي تدل فيه  $س$  على المسافة التي يقطعها جسم متحرك بسرعة منتظمة  $س$  في زمن  $ز$  ففي هذا القانون إذا دلت  $ز$  على عدد الثواني التي يتحرك فيها الجسم  $س$  على عدد السنتيمترات التي يقطعها في الثانية دلت  $س$  على المسافة المقطوعة في الزمن  $ز$  مقدرة بالسنتيمترات مثال ذلك : إذا كانت سرعة قطار ٢٢٥٠ سنتيمترا في الثانية وأريد معرفة الزمن الذي يتز فيه على جسر طوله ٢٧٠ مترا فهل

إننا إذا عوضنا في القانون السابق عن كل من  $س$  و  $ز$  ما يساويه من السنتيمترات ينتج أن

$$\begin{aligned} ٢٧٠٠٠ &= ٢٢٥٠ \times ز \\ \frac{٢٧٠٠٠}{٢٢٥٠} &= ز \\ ١٢ &= ز \end{aligned}$$

ويكون الزمن حينئذ ١٢ ثانية

بند ٨٥ - وهناك حالة أخرى مهمة جدا وهي حالة جسم ساقط في اتجاه رأسي بتأثير جذب الأرض فمن القواعد المقررة في علم الديناميكا أن كل جسم ساقط إذا كان مبتدئا من سكون كانت المسافة  $س$  التي يقطعها مقدرة بالسنتيمترات في زمن  $ز$  مقدرا بالثواني بمينة بالقانون الآتي  $س = \frac{١}{٢} ز^2$  وفي هذا القانون تدل  $س$  على عدد السنتيمترات التي تزيد بها سرعة الجسم الساقط في كل ثانية على سابقتها بسبب جذب الأرض وقد وجد بالتجربة أن  $٩٧٩ = س$  سنتيمترا تقريبا (مثال ١) سقط جسم من مأذنة فوصل الأرض بعد ٤ ثوان فما ارتفاع المأذنة بتطبيق القانون نجد أن  $٩٧٩ \times \frac{١}{٢} = س$  سنتيمترا

$$٧٨٣٢ = س$$

فيكون ارتفاع المأذنة حينئذ ٧٨٣٢ من الأمتار

(مثال ٢) ما الزمن الذي يصل فيه حجر إلى قاع بئر عمقها ٤٤٠.٥ من السنتيمترات بتطبيق القانون نجد أن  $٤٤٠.٥ = \frac{١}{٢} ز^2$

$$٩ = \frac{٤٤٠.٥ \times ٢}{٩٧٩}$$

$$٣ = ز$$

فالزمن حينئذ ٣ ثوان

### (تمارين ٩)

(١) أوجد بواسطة قانون مساحة المثلث المذكور بالبند ٨٣

(أولا) المساحة حينما تكون القاعدة ٣٢ سنتيمترا والارتفاع ١٧ سنتيمترا

(ثانيا) القاعدة حينما تكون المساحة ٥٦ سنتيمترا مربعا والارتفاع ٧ سنتيمترات

(ثالثا) الارتفاع حينما تكون المساحة ٧.١ من الآرات والقاعدة ٣.٥ من الامتار

- (٢) أوجد بواسطة القانون ٢ المذكور في بند ٨٣
- (أولاً) حجم هرم ارتفاعه ٤٠ سنتيمتراً وسطح قاعدته ١٩٥ سنتيمتراً مربعاً  
 (ثانياً) حجم هرم ارتفاعه ٦٠ سنتيمتراً وقاعدته مربع ضلعه ١٥ سنتيمتراً  
 (ثالثاً) ارتفاع هرم حجمه ٢٠ متراً مكعباً وسطح قاعدته ١٢ متراً مربعاً
- (٣) حل المسائل الآتية بواسطة القانون المذكور بالبند ٨٤ وهو  $س = س'$
- (أولاً) كم كيلومتراً يقطعها قطار يسير ٨٤ دقيقة بسرعة ٣٥ كيلومتراً في الساعة  
 (ثانياً) ما الزمن الذي يقطع فيه قطار ٥٦ كيلومتراً إذا كانت سرعته ٤٢ كيلومتراً في الساعة  
 (ثالثاً) قطار يسير ٥٥٠٠ متر في خمس دقائق فما سرعته بالكيلومتر في الساعة
- (٤) أوجد بواسطة القانون  $م = \frac{١}{٢} س > س'$  الوارد بالبند ٨٥ ما يأتي
- (أولاً) ارتفاع سارية إذا استغرق حجر ثلاث ثوانٍ في سقوطه من قمتها إلى الأرض  
 (ثانياً) الزمن الذي يستغرقه حجر في سقوطه من طيارة ارتفاعها عن سطح الأرض ١٢٢,٣٧٥ من الأمتار
- (٥) من الأمور المقترنة أن طول المحيط  $م$  في الدائرة يساوي قطرها  $ن$  مكرراً مرات عددها  $ط$  ومساحتها  $س$  تساوي مربع نصف قطرها  $ن$  مكرراً مرات عددها  $ط$  بين هاتين النتيجةين قانونين جبريين
- إذا كانت  $ط$  تساوي  $\frac{٢٢}{٧}$  فما محيط ومساحة كل من دائرتين نصف قطر أحدهما ٧ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٥٦ سنتيمتراً
- (٦) إذا كان القانون الذي يستخرج منه السطح  $س$  لكرة نصف قطرها  $ن$  هو  $س = ٤ \times \frac{٢٢}{٧} ن^٢$
- فيعين (١) سطح كرة نصف قطرها ١٤ سنتيمتراً  
 (٢) نصف قطر كرة سطحها ٣٨٥٠ سنتيمتراً مربعاً
- (٧) حجرة طولها  $ن$  من الأمتار وعرضها  $هـ$  من الأمتار وارتفاعها  $ع$  من الأمتار والمطلوب وضع القوانين التي يستخرج منها
- (١) محيط أرض الحجرة  
 (٢) سطح أرضها  
 (٣) سطح حيطانها
- (٨) عتبن بواسطة القوانين المشار إليها في التمرين السابق محيط أرض حجرة ومساحتها وكذلك المساحة السطحية لحيطانها مع العلم بأن طول الحجرة ٦,٥ من الأمتار وعرضها ٤,٧٥ من الأمتار وارتفاعها ٥ أمتار
- (٩) استخرج من القانون (٣) في التمرين ٧ ارتفاع قاعة طولها ٥,٧٥ من الأمتار وعرضها ٤ أمتار ومسطح حيطانها ١٢٦,٧٥ من الأمتار المربعة

(١٠) إذا كان القانون الذي يستخرج منه السطح  $س$  لمتوازي الأضلاع الذي قاعدته  $ن$  وارتفاعه  $ع$  هو  
 $س = ن \times ع$

- فتمين (١) سطح متوازي الأضلاع الذي قاعدته  $٥,٥$  من الستيمترات وارتفاعه  $٤$  سنتيمترات  
 (٢) سطح متوازي الأضلاع الذي قاعدته  $٢,٤$  من البوصات وارتفاعه  $١,٥$  من البوصات  
 (١١) مساحة متوازي الأضلاع  $٤,٢$  من الأمتار المربعة وقاعدته  $٢,٨$  من الأمتار فما ارتفاعه  
 (١٢) مساحة شبه المنحرف  $= \frac{1}{2} \times (\text{مجموع الضلعين المتوازيين}) \times (\text{البعد بينهما})$  بين ذلك بالرموز  
 الجبرية وطبق القانون في إيجاد مساحة شبه منحرف طول أحد ضلعيه المتوازيين  $٦,٥$  من  
 الأمتار وطول الآخر  $٧,٥$  من الأمتار والبعد بينهما  $٤$  أمتار  
 (١٣) استعمل القانون المشار إليه (في بند ٨٠ مثال ٦) في إيجاد العدد الذي إذا قسم على  $١٩$  يكون  
 خارج القسمة  $١٧$  وباقيها  $٥$

- (١٤) على أي عدد تقسم  $٥٦٦$  ليكون الخارج  $٣٧$  والباقي  $١١$   
 (١٥) رجل يصير عمره بعد  $٥$  سنوات ثلاثة أمثال عمر ولده البالغ الآن  $١٥$  سنة ما عمر الرجل الآن  
 حقق الجواب بالتعويض في القانون المذكور بالبند ٨١ (مثال ١)  
 (١٦)  $٦$  ب ضلعا القائمة من مثلث قائم الزاوية  $٦$  وتر المثلث ومعلوم أن  $٦$  ب  $٢$  ب  $٢$  ب  $٢$  ب  
 بين بالتعويض ما يصلح من مجاميع الأعداد الآتية أن يكون أضلاع مثلث قائم الزاوية

(أولاً)  $٢٥$  ٦  $٢٤$  ٦

(ثانياً)  $٣٦$  ٦  $٣٥$  ٦

(ثالثاً)  $٦,٥$  ٦  $٦,٣$  ٦

- (١٧) المستطيل الذي بعده مستقيمان أحدهما مقسم إلى عددًا من الأجزاء يكافئ مجموع المستطيلات  
 المكونة من المستقيم غير الجزء وأجزاء المستقيم الجزء. أثبت ذلك جبرياً بوضع رموز تدل على  
 المستقيم غير الجزء وأجزاء المستقيم الآخر

(١٨)  $١$  ب مستقيم مقسم إلى جزأين أيا كانا في نقطة  $ح$  أثبت جبرياً كما في المثال السابق أن

$$(١) \quad ١ \text{ ب} = ١ \text{ أ} + ١ \text{ ح} + ١ \text{ ب}$$

$$(٢) \quad ١ \text{ ب} = ١ \text{ أ} + ١ \text{ ح} + ١ \text{ ب}$$

وفسر هاتين النتيجةين بالألفاظ كما في التمرين (١٧)

(١٩) أثبت جبرياً النظريتين الآتيتين

(أولاً) إذا قسم مستقيم إلى جزأين أيا كانا فالمرجع المنشأ عليه يكافئ مجموع المربعين المشأين على

هذين الجزأين مضافاً إلى هذا المجموع ضعف المستطيل المكوّن من هذين الجزأين

(ثانياً) إذا قسم مستقيم إلى جزأين أيا كانا فمجموع المربعين المنشأ أحدهما على المستقيم

جميعه والآخر على أحد الجزأين يكافئ ضعف المستطيل الذي بعده ذلك المستقيم

والجزء المشار إليه مضافاً إلى ذلك المربع المنشأ على الجزء الآخر

بين نتيجة هاتين النظريتين بكيفية مماثلة للذكورة في (١) ٦ (٢) تمرين ١٨

(٢٠) باستعمال الرموز المذكورة في تمرين ١٦ أوجد قيمة

$$(١) \quad ٨ = ٦ \quad ١٥ = ١ \quad \text{متى كانت}$$

$$(٢) \quad ٧ = ٦ \quad ٢٥ = ٢ \quad \text{متى كانت}$$

$$(٣) \quad ٩ = ١ \quad ٤١ = ٣ \quad \text{متى كانت}$$

$$(٤) \quad ٦,٣ = ٦ \quad ٦٥ = ٣ \quad \text{متى كانت}$$

$$(٢١) \quad \text{إذا كانت } ٦ = ٣,١٤١٦ \quad ٦ = ١٨,٧٥ \quad ٦ = ٦١,٨٧٥ \quad ٦ = ١٧٦٢٢ \quad ٦ = ٩٧٩$$

$$٦ = ١٨,٧٥ \quad ٦ = ٥,٦ \quad \text{فما قيمة}$$

$$(١) \quad ٦ = ٢ \quad (٢) \quad ٢ = ٢ \quad (٣) \quad ٢ = ١ \quad \text{كـ}$$

$$(٢٢) \quad \text{ما مقدار } ٦ \text{ في القانون } ٦ = ٢ \quad \text{إذا كانت } ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢$$

$$(٢٣) \quad \text{ما قيمة } ٦ \text{ في القانون } ٦ = ٢ \quad \text{إذا كانت } ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢$$

$$(٢٤) \quad \text{استخرج من القانون } ٦ = ٢ \quad (١) \quad (٢) \quad (٣) \quad (٤)$$

$$(أولاً) \quad \text{قيمة } ٦ \text{ متى كانت } ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢$$

$$(ثانياً) \quad \text{قيمة } ٦ \text{ متى كانت } ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢$$

$$(ثالثاً) \quad \text{قيمة } ٦ \text{ متى كانت } ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢$$

$$(رابعاً) \quad \text{قيمة } ٦ \text{ متى كانت } ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢$$

$$(٢٥) \quad \text{إذا كانت } ٦ = ٢ + ٤ \quad \text{فما قيمتها إذا كانت } ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢ \quad ٦ = ٢$$

تطبيق : خيط مائل طول المسافة بين العمودين التاليين من طرفه على الأرض ٢٠ متراً وبعد أى نقطة منه عن أحد العمودين التاليين المذكور من الأمتار ويسمى الرأسى عن سطح الأرض  $٦ = ٢ + ٤$  من الأمتار

الرسم الخيط بمقياس سنيمتر واحد لكل مترين ويتن على الرسم ارتفاعه عن الأرض في كل من طرفيه وعلى مسافات بين كل منها والأخرى ٤ أمتار

## الباب العاشر - مسائل تقول في حلها إلى معادلات بسيطة

بند ٨٦ - الآن يمكن استعمال القواعد التي عرفناها من الباب السابق في حل مسائل متنوعة وطريقة الحل كما يأتي

فرض أن المجهول  $٦$  ثم نعين رموز جبرية الفروض الواردة في رأس المسألة ونلك نتج معادلة بسيطة نحل بالطرق المبينة بالباب الثامن

(مثال ١) إذا أريد إيجاد عددين مجموعهما ٢٨ وفرقهما ٤

فرض أن  $٦$  أصغر العددين فأكبرهما  $٦ + ٤$  وحاصل جمعها  $٦ + (٦ + ٤)$  وهو يساوى ٢٨ على حسب متطوق المسألة

$$\text{إذن} \quad ٢٨ = ٦ + ٦ + ٤$$

$$\therefore \quad ٢٤ = ٦$$

$$\therefore \quad ١٢ = ٦$$

$$١٦ = ٦ + ٤$$

فالعددان إذن ١٢ و ١٦

يحسن بالمبتدئ أن يحقق النواجح ليكون على ثقة من صحة عمله وذلك بأن يبحث فيها إذا كانت هذه النواجح تنطبق على رأس المسألة أم لا

(مثال ٢) قسم العدد ٦٠ إلى عددين بشرط أن تكون زيادة ثلاثة أمثال أكبرهما على المسألة بقدر نقص ثمانية أمثال أصغرهما عن المائتين

نفرض أن  $x$  العدد الأكبر فيكون العدد الأصغر  $60 - x$  ويكون ثلاثة أمثال الأكبر  $3x$  ومقدار زيادته على المائة  $3 - 100$  ويكون ثمانية أمثال الأصغر  $8(60 - x)$  ( $60 - x$ ) ومقدار نقصه عن المائتين  $200 - 8(60 - x)$  ( $60 - x$ )

وحينئذ يمكن وضع معلومات المسألة بطريقة الرموز الجبرية على الوجه الآتي

$$3x - 100 = 200 - 8(60 - x)$$

$$3x - 100 = 200 - 480 + 8x$$

$$480 - 100 - 200 = 8x - 3x$$

$$180 = 5x$$

$$36 = \text{العدد الأكبر}$$

$$60 - 36 = 24 = \text{العدد الأصغر}$$

(مثال ٣) لقسم ٤٧ جنيناً بين ٦ ب و ٦ ح بشرط أن يأخذ أ عشرة جنينيات زيادة على ما يأخذ ب و ٦ يأخذ ثمانية جنينيات زيادة على ما يأخذ ح

نفرض أن نصيب ح هو  $x$  من الجنينيات ٥ إذن  $x + 8$  من الجنينيات نصيب ب و  $6x + 8 + 10$  من الجنينيات نصيب أ

$$47 = (10 + 8 + x) + (x + 8) + x$$

$$47 = 10 + 8 + x + 8 + x + x$$

$$21 = 3x$$

$$7 = x$$

فيخص ح سبعة جنينيات ٦ ب ١٥ جنينيات ٦ أ ٢٥ جنينيات

(مثال ٤) اشترى شخص أوزاً و بطاً بمبلغ ٢٨ جنينياً انجليزيًا و ٤ شلنات فإذا كان ثمن الأوزة ٧ شلنات و ثمن البطة ٣ شلنات وعدد الأوز والبط معاً ١٠٨ فكيف اشترى من كل نوع

من الضروري جداً في كل المسائل التي من هذا القبيل أن نحول كل الكميات إلى نوع واحد في هذا المثال يحسن تحويل النقود كلها إلى شلنات

فإذا فرض أن  $x$  عدد الأوز فيكون عدد البط  $108 - x$  ومن حيث إن ثمن الأوزة ٧ شلنات يكون ثمن  $x$  من الأوز  $7x$  من الشلنات

ومن حيث إن ثمن البطة ٣ شلنات يكون ثمن  $(108 - x)$  من البط  $3(108 - x)$  من الشلنات وتكون جملة الثمن إذن  $7x + 3(108 - x)$  من الشلنات

ولما كان مفروضاً في رأس المسألة أن ثمن الأوز والبط معاً ٢٨ جنينياً ٦ ٤ شلنات أي ٥٦ شلناً

$$56 = 7x + 3(108 - x)$$

$$56 = 7x + 324 - 3x$$

$$240 = 4x$$

$$60 = \text{عدد الأوز}$$

$$108 - 60 = 48 = \text{عدد البط}$$

أي أن

∴



(مثال ٥) عمر أ الآن ضعف عمر ب ومنذ عشر سنين كان عمر أ أربعة أمثال عمر ب  
فما عمر كل منهما الآن

لنفرض أن عمر ب الآن  $x$  من السنين فيكون عمر أ الآن  $2x$  من السنين ومنذ عشر سنين  
كان عمر ب هو  $(x - 10)$  من السنين ٦ عمر أ هو  $(2x - 10)$  من السنين

$$\text{فيكون} \quad 2x - 10 = 4(x - 10)$$

$$2x - 10 = 4x - 40$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

∴

وحينئذ يكون عمر ب ١٥ سنة ٦ عمر أ ٣٠ سنة

(ملاحظة) في الأمثلة السابقة دلت  $x$  على عدد من الجنيات أو من البط أو من السنين الخ  
ويجب أن يتجنب الطالب البدء في الحل من غير أن يذكر نوع الكمية المجهولة كأن يقول لنفرض أن  $x$   
= نصيب أ ولنفرض أن  $x$  = البط أو أى عبارة أخرى من هذا القبيل مبهمه وغير مضبوطة

### (تمارين ١١٠)

- (١) عدد يزيد على آخر خمسة ومجموعهما ٢٩ فما هما
- (٢) الفرق بين عددين ٨ وإذا أضيفت ٢ إلى أكبرهما كان الحاصل ثلاثة أمثال الأصغر فما العددين
- (٣) عَيْن عددا تكون زيادته على ٥٠ أكبر من نقصه عن ٨٩ بقدر ١١
- (٤) مشى رجل عشرة كيلومترات ثم قطع بالقطار مسافة لا يعلم طولها ثم قطع ضعف هذه المسافة بالعربة فما مقدار ما قطعه بالقطار إذا كانت المسافة جميعها ٧٠ كيلومترا
- (٥) ما العددين اللذان مجموعهما ٥٨ وفرقهما ٢٨
- (٦) إذا أضيف ٢٨٨ إلى عدد وسأوى الحاصل ثلاثة أمثال ما يزيده ذلك العدد على ١٢ فما العدد
- (٧) حاصل ضرب عدد في ٢٣ يزيد على ١٤ بقدر ما يزيد ١٦ على ٧ أمثال ذلك العدد فما العدد
- (٨) قسم ١٠٥ إلى عددين إذا طرح من أحدهما ٢٠ كان الباقي مساويا للآخر مطروحا منه ١٥
- (٩) أوجد ثلاثة أعداد متتالية حاصل جمعها ٨٤
- (١٠) حاصل جمع عددين ٨ ولو أضيف إلى أحدهما ٢٢ لسأوى خمسة أمثال الآخر فما العددين
- (١١) ما العددين اللذان فرقهما ١٠ وحاصل جمعهما ضعف فرقهما
- (١٢) رجل معه ٦٠ جنيا في جيب و ٦٠ جنيا في جيب ثان فأخذ من أحد الجيبين مبلغا ووضعهُ في الجيب الثاني وبذا صار ما في هذا الأخير ضعف ما في الأول فما المبلغ الذي أخذه من الجيب الأول
- (١٣) أوجد عددا إذا أضيف إليه ٥ ١٥ ٦ ٣٥ على التوالي يكون حاصل ضرب المجموعتين الأول والثالث يساوى مربع المجموع الثاني
- (١٤) الفرق بين مربعي عددين متتالين ١٢١ فما العددين
- (١٥) الفرق بين عددين ٣ وبين مربعيهما ٢٧ فما العددين

(١٦) قسم ٣٨٠ جنبها بين ثلاثة أشخاص بشرط أن يأخذ الثاني ٣٠ جنبها زيادة على ما يأخذ الأول  
ويأخذ الثالث ٢٠ جنبها زيادة على ما يأخذ الثاني

(١٧) مبلغ ٨٨٥ من الجنيئات مكوّن من ١٢٤ قطعة من العملة . منها ما هو من ذات عشرة  
القروش . ومنها ما هو من ذات خمسة القروش . فكم عدد قطع كل نوع

(١٨) إذا كانت ثمن الحرير ستة أمثال ثمن التيل وصرف ٩٠٤٠ من الجنيئات في شراء ٢٣ مترا  
من الحرير و ٥٠ مترا من التيل فما ثمن المتر من كل نوع

(١٩) عمر أب أربعة أمثال عمر ابنه وبعد ٢٤ سنة يصير عمر الأب ضعف عمر الابن فما عمر كل منهما  
(٢٠) يزيد عمر أحمد على عمر محمد ٢٥ سنة . ويزيد عمر الأول أيضا على عشرين بقدر ما ينقص عمر  
محمد عن ٨٥ فما عمر كل منهما

(٢١) عمر عبيد ٦ أمثال عمر حامد وبعد ١٥ سنة يصير عمر الأول ثلاثة أمثال عمر الثاني فما عمر كل منهما

(٢٢) دفع مبلغ ٣٥٠ من الجنيئات قطعا من الريال وأنصافه وأرباعه وكان عدد قطع الصنف الثاني  
أربعة أمثال عددها من الصنف الأول وضعف عددها من الثالث فكم كان عدد قطع كل نوع

(٢٣) مجموع عمرى محمود ومحمد ٣٠ سنة . وبعد ٥ سنين يصير عمر محمود ثلاثة أمثال عمر محمد فما  
عمر كل منهما الآن

(٢٤) طول قاعة يزيد على عرضها ثلاثة أمتار ولو زاد الطول ثلاثة أمتار ونقص العرض مترين لما  
تغير مقدار سطح القاعة فما مقدار كل من الطول والعرض الأصليين

(٢٥) طول قاعة يزيد على عرضها ثمانية أقدام ولو زاد كل من الطول والعرض قدمين ل زاد سطح  
القاعة ٦٠ قدما مربعا فما مقدار كل من الطول والعرض الأصليين

بند ٨٧ - تأتي الآن على أمثلة تؤول في حلها إلى معادلات ذات معاملات كسرية

(مثال ١) أوجد عددين الفرق بينهما ٤ ويزيد نصف الأكبر على سدس الأصغر قدر ٨

نفرض أن  $x =$  الأصغر فيكون الأكبر  $x + 4$  ونصف الأكبر  $\frac{1}{2}(x + 4)$  (  $x + 4$  )  
سدس الأصغر  $\frac{1}{6}x$

اذن  $\frac{1}{2}(x + 4) - \frac{1}{6}x = 8$

ويضرب الطرفين في ٦ فيحدث  $3x + 12 - x = 48$

$2x = 36$

$x = 18$  أصغر العددين

$x + 4 = 22$  أكبرهما

(مثال ٢) رجل معه ١٨٠ من الجنيئات في جيب و ٨٤ قرشا في جيب آخر فاخذ مبلعا من

الجيب الأول ووضعه في الجيب الثاني وبنا صار ما في الجيب الأول  $\frac{1}{2}$  ما صار في الجيب الثاني فما  
المبلغ الذى أخذ من الجيب الأول

نفرض أن ما أخذ من الجيب الأول  $x$  من القروش

فيكون ما بقى في الجيب الأول  $180 - x$  من القروش

وما صار في الجيب الثاني  $84 + x$  من القروش

وعليه يكون ١٨٠ - س =  $\frac{٥}{٦}$  (٨٤ + س)

أي أن ١٠٨٠ - ٦ س = ٥ + ٤٢٠ س

$$٦٦٠ = ١١ س$$

$$٦٠ = س$$

إذن يكون المبلغ الذي أخذ من الجيب الأول ٦٠ قرشا

### (تمارين ١٠ ب)

- (١) ما العدد الذي مجموع سدسه وقسمة ١٥
- (٢) ما العدد الذي مجموع منه وسدسه وربعه ١٣
- (٣) الفرق بين خمس عدد وربعه ٣ ما العدد
- (٤) الفرق بين ستة أسابيع عدد وأربعة أضعافه ٢ ما العدد
- (٥) مجموع  $\frac{١}{٦}$  و  $\frac{١}{٦}$  و  $\frac{١}{٦}$  من عدد ٢٣ فما العدد
- (٦) ما العددين المتتاليان اللذان يزيد ربع أصغرهما على خمس الأكبر واحدا
- (٧) فرق عددين ٢٨ وأحدهما ثمانية أضعاف الآخر فما العددين
- (٨) ما العددين المتتاليان اللذان يزيد خمس أكبرهما على سبع الأصغر ثلاثة
- (٩) ثلاثة أعداد متتالية قسمت على ١٠ ١٧ ٦ ٢٦ بالترتيب فكان مجموع الخارج ١٠ فما الأعداد
- (١٠) رجل معه مبلغان متساويان كل في جيب فأخذ من أحد الجيبين مبلغا يساوي  $\frac{٥}{١١}$  مما في هذا الجيب ووضع في الجيب الثاني فإذا كان هذا المبلغ المضاف إلى الجيب الثاني يزيد على نصف ما بقي في الجيب الأول بمقدار ٦ جنيهات فما المبلغ الذي كان في كل جيب أولا
- (١١) طرح ٣ من عدد وقسم الباقي على ٤ ثم أضيف إلى الخارج ٤ وقسم حاصل الجمع على ٥ فنتج ٢ فما العدد
- (١٢) مخزن به زجاجات مداد خمسها أسود وثلثها أزرق والباقي ١٨٠ زجاجة من المداد البنفسجي و ٣٠ زجاجة من المداد الأحمر فما عدد زجاجات المداد الأسود وما عدد زجاجات المداد الأزرق
- (١٣) خمسًا نقود ١ يساويان نقود ٦ وسبعة أضعاف نقود ٦ يساوي نقود ٥ وجملة ما مع الثلاثة ٧٧٠ جنيتها فما مقدار نقود كل منهم
- (١٤) مجموع ما يملكه أ ب ٦ ب ٦ ١٢٨٥ جنيتها وما مع أ يزيد ٢٥ جنيتها على خمسة أضعاف ما مع ب وما مع ب يساوي  $\frac{١}{٥}$  مما مع ب فما مقدار ما يملكه كل من الثلاثة
- (١٥) باع رجل حصانا بنصف ما اشتراه به مضافا إليه خمسة وثلاثون جنيتها فربح ١٠٥ من الجنيهات فما الثمن الذي اشترى به الحصان
- (١٦) عرض قاعة ثلثا طولها فإذا زاد العرض مترا ونقص الطول مترا صارت القاعة مربعة فما طولها وعرضها
- (١٧) ما قيمة أملاك شخص إرادته ٤٣٠ جنيتها في السنة إذا كان ثلثا ما يملكه يأتي بربح ٤٪ وربعه يربح ٣٪ والباقي يربح ٢٪
- (١٨) اشتريت مقدارا من التفاح فدفعت في كل ٣ تفاحات قرشا ثم اشتريت ما يعادل خمسة أضعاف هذا المقدار فدفعت في كل ٤ منها قرشا ثم بت التفاح كله كل ١٦ بستة قروش وكان ربحي في الكل  $\frac{١}{٣}$  من القروش فكم تفاحة اشتريت في المرةين





## الباب الثاني عشر - الكسور البسيطة

بند ٩٤ - تعريف : إذا قسمت كمية  $s$  إلى أجزاء متساوية عددها  $b$  ثم أخذنا  $a$  من تلك الأجزاء فالأخذ يسمى الكسر  $\frac{a}{b}$  من الكمية  $s$  وإذا كانت  $s$  هي الوحدة فالكسر  $\frac{a}{b}$  من الكمية  $s$  يسمى الكسر  $\frac{a}{b}$  فقط وفي هذه الحالة يدل الكسر  $\frac{a}{b}$  على أجزاء متساوية عددها  $b$  لو أخذ منها عدد يساوي  $b$  لتكون الوحدة

بند ٩٥ - سلبحث في هذا الباب في البسيط من الكسور أى التي بسوطها ومقاماتها مقادير جبرية بسيطة وهذه الكسور تجنس وتختصر على مقتضى الطرق الموضوعة في علم الحساب أما براهين هذه الطرق فستأتى إن شاء الله في الباين ١٩ ٦ ٢١

(قاعدة) لاختصار أى كسر إلى أصغر حذيه قسم كلا من بسطه ومقامه على كل عامل مشترك بينهما أى قسمهما على عاملهما المشترك الأعلى وتسمى عملية قسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك بينهما بعملية اعتزال هذا العامل

$$\frac{12}{22} = \frac{6}{11} \quad (\text{مثال ١})$$

$$\frac{1}{4} = \frac{7}{28} \quad (\text{مثال ٢})$$

$$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{160}{4} \quad (\text{مثال ٣})$$

## (تباين ١٢)

لختصر كلا من الكسور الآتية إلى أصغر حذيه

$\frac{24}{36}$ (١٥)	$\frac{218}{112}$ (٨)	$\frac{12}{16}$ (١)
$\frac{24}{36}$ (١٦)	$\frac{12}{10}$ (٩)	$\frac{24}{16}$ (٢)
$\frac{15}{20}$ (١٧)	$\frac{215}{18}$ (١٠)	$\frac{2}{5}$ (٣)
$\frac{24}{36}$ (١٨)	$\frac{1}{2}$ (١١)	$\frac{12}{10}$ (٤)
$\frac{28}{35}$ (١٩)	$\frac{22}{5}$ (١٢)	$\frac{2}{5}$ (٥)
$\frac{28}{35}$ (٢٠)	$\frac{2}{4}$ (١٣)	$\frac{10}{20}$ (٦)
	$\frac{10}{10}$ (١٤)	$\frac{21}{28}$ (٧)

## ضرب الكسور وقسمتها

بند ٩٦ - قاعدة : يتبع في ضرب الكسور الجبرية طريقة ضرب الكسور الحسابية بمعنى أن نضرب البسوط ليتكون منها بسط حاصل الضرب والمقامات ليتكون منها مقام حاصل الضرب

$$\text{(مثال ١)} \quad \frac{١٢}{١٢} = \frac{٤٢ \times ٥٠ \times ١٢}{٢٢ \times ٢٢ \times ٢٢} = \frac{٤٢}{٢٢} \times \frac{٥٠}{٢٢} \times \frac{١٢}{٢٢}$$

وذلك باعتبار العوامل المشتركة في البسط والمقام

$$\text{(مثال ٢)} \quad ١ = \frac{١٥}{٤٧} \times \frac{٢٧}{٢١٢} \times \frac{٢١٢}{٢٥}$$

بند ٩٧ - قاعدة : نقسمه كسر على آخر قلب المقسوم عليه ثم تتبع ما مر في الضرب

$$\text{(مثلا)} \quad \frac{٢١٧}{٤٢٢٨} \times \frac{٢١٧}{٤١٥} = \frac{٢١٧}{٤٢٢٨} \div \frac{٤١٥}{٢١٧} = \frac{٢١٧}{٤٢٢٨} \times \frac{٢١٧}{٤١٥}$$

أما باقي العوامل فيمحو بعضها بعضاً لأنها مشتركة بين البسط والمقام

## (تمارين ١٢ ب)

اختصر كلا من الكسور الآتية إلى أصغر حدين

$$(١٠) \quad \frac{٢٦٦٨٤٢}{٢٨٧} \div \frac{٢٢٨٤}{١٢٨٧} \times \frac{٢٢٨٤}{٢٨٧}$$

$$(١١) \quad \frac{١٥}{٤٠} \div \frac{٢٧}{٤١٤} \times \frac{٢٧}{٤١٤}$$

$$(١٢) \quad \frac{١٦}{٤١٥} \div \frac{٢٤}{٢٥} \times \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$(١٣) \quad \frac{٤٩}{٤٤٦} \times \frac{١٨}{٢٧}$$

$$(١٤) \quad \frac{١٢٨}{١٠٠} \div \frac{١٥}{٤١٦} \times \frac{١٥}{٤١٦}$$

$$(١٥) \quad \frac{٢٢٢}{١٨٠} \times \frac{٢٤٥}{٢٧}$$

$$(١٦) \quad \frac{١٠٤}{٢٨} \div \frac{٢٢}{٢٨} \times \frac{٢٢}{٢٨}$$

$$(١٧) \quad \frac{٢}{٢٨} \times \frac{٢٦}{٢٨} \div \frac{١٥}{٢٧}$$

$$(١٨) \quad \frac{٢}{٢٨} \times \frac{٢٦}{٢٨} \div \frac{١٥}{٢٧}$$

$$(١) \quad \frac{١٢}{٤٢} \times \frac{٢٢}{٤٢}$$

$$(٢) \quad \frac{٢٢٤}{٢٣٦} \times \frac{٢١٢}{٤١٨}$$

$$(٣) \quad \frac{٢٢٢}{٤٢} \times \frac{١٥}{٢١١}$$

$$(٤) \quad \frac{١٨}{٤١٥} \times \frac{٢١٧}{٢١٧}$$

$$(٥) \quad \frac{٢٢٨}{٢٢١٦} \times \frac{١٥}{٢٢١٦}$$

$$(٦) \quad \frac{٢٢٢}{٢٢٨} \times \frac{٢٢١}{٢٢١٣}$$

$$(٧) \quad \frac{٢٢}{٢١٨} \div \frac{٢٦}{٢١٨} \times \frac{٢٢}{٢١٨}$$

$$(٨) \quad \frac{٢٢}{٢٢} \times \frac{٢٥}{٢٢} \div \frac{٢٤}{٢٢}$$

$$(٩) \quad \frac{٢٦}{٢١١} \times \frac{٢٦}{٢١١} \div \frac{١٥}{٢١١}$$

### تجنيس الكسور

بند ٩٨ - - جمع الكسور أو طرحها يجب أولاً تجنيسها كما في الحساب وأسهل طريقة لذلك أن تبحث عن المضاعف المشترك البسيط لمقامات الكسور المقروضة (مثال) لتوحيد مقامات الكسور

$$\frac{1}{٢٠} + \frac{٢}{١٠} + \frac{٣}{٥}$$

مع مراعاة جعل مقامها المشترك أبسط ما يكون نقول إن المضاعف المشترك البسيط للمقامات ٢٠ ١٠ ٥ هو ٢٠ ويضرب حتى كل كسور في العامل الذي يلزم أن يضرب في مقام هذا الكسر ليكون الناتج ٢٠ هو ٢٠ ٢٠ ٢٠ فتتبع الكسور الآتية

$$\frac{1}{٢٠} + \frac{٢}{١٠} + \frac{٣}{٥} = \frac{1}{٢٠} + \frac{٤}{٢٠} + \frac{١٢}{٢٠}$$

وهذه الكسور تساوى على الترتيب الكسور المقروضة (ملاحظة) نحصل على النتيجة عنها إذا قسمنا المضاعف المشترك البسيط على كل مقام وضربنا حتى كل كسور في خارج قسمة المضاعف المشترك البسيط على مقامه

### (تمارين ١٢ >)

وجد مقامات الكسور الآتية بدون أن تبحث تغييراً في قيمتها

$\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} (١٣)$	$\frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥} (٧)$	$\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} (١)$
$\frac{١٢}{١٠} + \frac{١٤}{٥} (١٤)$	$\frac{٥}{٦} + \frac{٤}{٣} (٨)$	$\frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥} (٢)$
$\frac{٥}{٢١} + \frac{١٢}{٧} (١٥)$	$\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٥} (٩)$	$\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٥} (٣)$
$\frac{١}{٩} + \frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٣} (١٦)$	$\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٥} (١٠)$	$\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥} (٤)$
	$\frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} (١١)$	$\frac{٣}{٤} + \frac{١٢}{٥} (٥)$
	$\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٤} (١٢)$	$\frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٥} (٦)$

### جمع الكسور وطرحها

بند ٩٩ - قاعدة : جمع الكسور أو طرحها نحول تلك الكسور إلى أخرى مساوية لها في القيمة بأبسط مقام مشترك ونجمع البسوط جماً جبرياً ونقسم حاصل الجمع على المقام المشترك

(مثال ١) لاختصار المقدار الجبري  $\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٥} - \frac{٧}{٦}$

نقول إن المقام المشترك البسيط ١٢

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣٠}{١٢} + \frac{٩}{١٢} - \frac{١٤}{١٢} = \frac{٢٥}{١٢}$$





## أسئلة متنوعة (٢)

(معظمها على الأبواب الثمانية الأولى)

(١) ما المقدار الذي يجب أن يضم إلى ٤ سر<sup>٢</sup> - ٣ سر<sup>٢</sup> + ٢ لينتج ٤ سر<sup>٢</sup> + ٧ سر - ٦

(٢) إذا كانت ١ = ٦ سر - ٣ سر + ٢ ع ٦ ٥ = سر + سر + ٦ ع

٦ ٥ = ١٠ سر + سر - ٧ ع فما قيمة

١ + ٤ - ٥

(٣) إذا كانت سر = ٣ = ٦ سر = ٤ ع = ١ فما قيمة

$\frac{٢٧ سر + ٢ سر + ٤ سر + ٦ سر + ٩ سر + ٢ سر}{٣}$

(٤) اختصر ما يأتي بإزالة الأقواس

$\{ (٢ - ٢ هـ) + (٢ - ٢ هـ) \} - (٢ - ٢ هـ) - (٢ - ٢ هـ)$

(٥) اضرب سر<sup>٢</sup> + سر<sup>٢</sup> + ٣ سر + ٥ في سر<sup>٢</sup> - سر - ٢

(٦) حل المعادلتين الآتيتين

(١) ٣ - ٤ سر = ٣٦ سر - ١٧

(٢) ٥ سر - ١٥ = ١٧ سر + ٢١

(٧) اقسم سر<sup>٢</sup> - ١٠ سر<sup>٢</sup> + ٩ على سر<sup>٢</sup> - ٢ سر - ٣

(٨) اختصر ١٧ - ٤ - ٥ - ١٥ - ٣ - ١ - ٢ - ١ - ٢ - ١ - ٢

(٩) حصل أحمد في امتحان على (سر + سر) من الدرجات ومجموع على (٢ سر - ٣ سر)

من الدرجات وجلال على ضعف درجات أحمد فما مجموع درجات ثلاثة التلاميذ

(١٠) أوجد حاصل جمع ١ - ٢ سر + سر<sup>٢</sup> ٦ ٣ سر - ٢ سر<sup>٢</sup> ٥ ٦ ٥ سر - ٧ سر - ٢

ورتب النتائج حسب القوى النازلة للحرف سر

(١١) أكتب حاصل الضرب في كل من

(١) (١٧ + سر) (٣ - سر)

(٢) (٣ - سر) (٨ - سر)

(١٢) حل المعادلتين الآتيتين

(١) ٧ سر - ٣ - (٧ - ٥ سر) = ٣ - ٢ سر - (٥ سر + ٨)

(٢) (٥ سر + ١) (٢ - سر) - (٤ سر - ٣) (٣ - سر) = ١٠ - (٧ سر + ٢) (١ + سر)

(١٣) من حاصل جمع ١٣ ٦ - ٥ - ١٥ ٦ ١٢ ٦ ١٧ ٦ - ٦ ١٩ ٦

اطرح حاصل جمع ١٨ ٦ ١٦ ٦ - ٦ ١٩ ٦ ١٠ ٦ ١١ ٦

(١٤) إذا كان ١ = ٤ = ٦ ٣ = ٥ = ٢ فما القيمة الرقمية للمقدار

$\frac{١٢ + ٢(١ - ٥)}{٢٥٢٧ - ٢٢}$

(١٥) من أى كمية تطرح  $١١ - ١٥ - ٧$  ليكون الباقي  $٧ + (١ + ٢) + ٥$

(۱۶) اضرب  $س^۲ + ۶س + ۸$  في  $س - ۸$  في  $س^۲ - ۲س + ۴$

$$[(٥٨ + ١٩) - \{(1 - ٥)٤ - ١٣\}٢ - ١٦] - ١١٢ \text{ انحصار (١٧)}$$

(١٨) حل المعادلتين الآتيتين وحقق الناتج في كل منهما

$$(0 - \infty) \xi = 3 + (2 - \infty 2) 2 + (1 - \infty 2) 3 (1)$$

$$16 + (8 + s) \frac{1}{5} = (4 + s) \frac{1}{2} + (1 + s) \frac{1}{4} \quad (2)$$

(19) إقسم ٣ ط + ١٦ ط - ٣٣ ط + ١٤ ط على ٧ ط

(٢٠) ضم المقادير الآتية بعضها إلى بعض

$$[(54-22)-5]-126 \cdot 54 + (22-5) - 126(5+22) - 54 + 1$$

(٢١) إلى أى مقدار تضم ٧<sup>٣</sup> - ٦<sup>٢</sup> - ٥<sup>١</sup> سيكون الناتج ٩<sup>٤</sup> - ٦<sup>٣</sup> - ٧<sup>٢</sup> -

(۲۲) ماقيمة سه. التي تجعل حاصل ضرب سه + ۱ في ۲ سه + ۱

أقل من حاصل ضرب  $س + ٣$  في  $٢ س + ٣$  بمقدار ١٤

(۲۳) إذا كان  $1 = 2$   $6 = 7$   $3 = 4$   $5 = 6$   $2 = 1$

[illegible]

(٢٤) حل المعادلة

$$\left(\frac{x^2}{4} - 4\right) \frac{4}{x^2} + \frac{1+x^2}{0} = \frac{13-x}{4} - x$$

وَمِنْ أَنْهَا لَا تُحَقِّقُ، إِذَا كَانَتْ س = ٣

(٢٥) حصان مأك، ٢٣ + ٢٢ م: كلمات الشعر في الأسموع فق: كم أسموع مأك،

$$12^2 - 2 \times 7 = 10^2 \text{ من الكلات}$$

(۲۶) اطح حاصل، جمع ۲ سر ۳ - سر ۳ + ۶ - ۳ سر ۲ + ۷ - ۷

$$[ \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{(n-2)} ] = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

من ۴ مره - ۲ مره + ۳ مره - ۶ مره = [۳ مره - ۶ مره]

(٢٧) ما قيمة  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  إذا كان  $x = 6$ ,  $y = 6$ ,  $z = 6$ .

(٢٨) حل المعادلتين الآتيتين

$$\left(1 - \frac{2}{10}\right) \frac{1}{10} = \frac{1-2}{10} + \frac{2}{10} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r^2}\right) \frac{1}{0} = \frac{1}{1} + \left(\frac{r}{r} - 1\right) \frac{1}{r} + \frac{(1-r)^2}{0} (2)$$

(۲۹) اقسام ۳ ص - ۳۷ ص + ۳ ص + ۷ ص + ۲ ص علی ص (ص - ۱)

$$2 - (4 + 3)$$

(٣٠) اقسام ١١٢٠ قرشا بين ٦١ ب بحيث اذا اخذ ١ خمسة قروش ياخذ ٦ قشرين

(٣١) ما قيمة  ${}^1P_1 + {}^2P_2 + {}^3P_3 + \dots + {}^{100}P_{100}$  ؟

إذا كان  $1 = 1 - 6$   $2 = 6 - 6$   $3 = 6 - 6$

(۳۲) اضرب  $(۸ + ۲۲)$   $(۲ + ۲)$  في  $۶ - ۴۳$

(٣٣) إقسم حاصل ضرب (سـ ٢) في (سـ ٣) في (سـ ٢) في (٧ - سـ ٢)

على حاصل جمع ٣ (سـ ٢ - سـ ٢) ٦ ٥ سـ - سـ ١٥

(٣٤) مشى رجل ط من الساعات بسرعة ١ من الكيلومترات في الساعة ثم ركب هـ من الساعات بسرعة ب من الكيلومترات في الساعة فمقدار المسافة التي قطعها وكم ساعة يقطع فيها المسافة كلها راكبا بسرعة حـ من الكيلومترات في الساعة بين نتيجة ذلك بفرض أن ط = ٧ ٦ هـ = ٣ ٦ ٤ = ٦ ٦ ٩ = ١١

(٣٥) حل المعادلتين

$$(1) \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$$

(٣٦) اشترى تاجر مقدارا من البيض فدفع ٦ في كل عشرين بيضة ثم اشترى خمسة أمثال ذلك المقدار فدفع ٣١ في كل مائة بيضة ثم باع جميع ما اشترى بسعر ٤ لكل اثنتى عشرة بيضة فكسب ١٠٨ فما عدد البيض الذي اشتراه

### الباب الثالث عشر - المعادلات الآتية المتعددة المجاهيل

بند ١٠٠ - لو نظرنا في المعادلة ٢ سـ + ٥ صـ = ٢٣ نجد أنها تشتمل على مجهولين

ومنها نستنتج أن ٥ صـ = ٢٣ - ٢ سـ

أى أن ٥ صـ = ٢٣ - ٢ سـ ... (١)

ويظهر من هذا أنه كلما وضعنا قيمة للرمز سـ فلا بد أن يكون للرمز صـ قيمة تابعة لقيمة سـ وعلى ذلك يمكننا إيجاد عدد غير متناه من المقادير لكل من سـ ٦ صـ تتحقق بها المعادلة المعلومة

فمثلا إذا كانت سـ = ١ ينتج من (١) أن صـ =  $\frac{21}{5}$

وإذا كانت سـ = ٢ ينتج أن صـ =  $\frac{19}{5}$  وهكذا

ولكن إذا كانت هناك معادلة أخرى من نوع المعادلة الأولى مثل

$$٣ سـ + ٤ صـ = ٢٤$$

نتج من هذه المعادلة الأخيرة أن

$$٣ سـ + ٤ صـ = ٢٤ \quad (2) \quad \dots \dots \dots$$

فإذا بحثنا الآن عن مقدارى سـ ٦ صـ اللذين يتحقق بهما كل من المعادلتين وجب أن تكون

قيمة صـ في (١) عين قيمتها في (٢)

$$\text{وإذن يكون} \quad \frac{3س - 24}{4} = \frac{23 - 2س}{5}$$

وبالضرب يجلت أن ٩٢ - ٨ سـ = ١٢٠ - ١٥ سـ

$$٢٨ = ٧ سـ$$

$$٤ = سـ$$

وبوضع قيمة  $x$  في المعادلة الأولى نجد أن

$$23 = 5 + x$$

$$15 = 5$$

$$\begin{cases} 3 = x \\ 4 = x \end{cases}$$

∴

∴

6

ومن ذلك يرى أنه إذا كان المراد أن يتحقق المعادلتان بمقدار واحد لكل من  $x$  و  $y$  لا يمكن أن يكون هناك إلا حل واحد

بند ١٠١ - تعريف : إذا أمكن تحقيق معادلتين أو أكثر بمقادير واحدة للكميات المجهولة فيها سميت آنية

وسنشرح في هذا الباب طرق حل هذه المعادلات مقتصرين على الأحوال البسيطة التي تكون فيها المجاهيل من الدرجة الأولى

بند ١٠٢ - اتبعنا في المثال السابق طريقة حل المعادلات المتعددة المجاهيل هي أحسن الطرق لبيان المعنى الذي يدل عليه اسمها (آنية) ولذا سنرى في العمل أنه يندر أن تكون هذه الطريقة أسرع طريقة للحل

ولا يفيين عن الذهن أنه ما دامت كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تتحقق بمقدارى المجهولين اللذين تتحقق بهما الأخرى فأي معادلة تستنتج من هاتين المعادلتين معا تتحقق أيضا بتعويض كل من  $x$  و  $y$  فيها بمقدارين هما عين المقدارين اللذين تتحقق بهما المعادلتان الأصليتان وسيكون الفرض الذي نرى إليه دائما في حل مثل هذه المعادلات إيجاد معادلة لا تشتمل إلا على مجهول واحد

بند ١٠٣ - والطريقة التي بواسطتها نحذف أحد المجهولين تسمى طريقة الحذف وهي تختلف باختلاف المعادلات

$$(1) \quad 3x + 7y = 27$$

(مثال ١) حل

$$(2) \quad 5x + 2y = 16$$

فلحذف  $x$  فنضرب المعادلة (١) في ٥ والمعادلة (٢) في ٣ حتى يصير معامل  $x$  في المعادلتين واحدا

$$15x + 35y = 135$$

فينتج أن

$$15x + 6y = 48$$

$$29y = 87$$

وبالطرح يحدث أن

$$3y = 3$$

∴

ولايجاد قيمة  $x$  نضع بدل  $y$  قيمتها ٣ في إحدى المعادلتين ولكن هذا في المعادلة (١)

$$3x + 21 = 27$$

فينتج أن

$$\begin{cases} 2 = x \\ 3 = y \end{cases}$$

∴

6

(ملاحظة) متى وجدت قيمة أحد المجهولين فلنا أن نستعمل إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة المجهول الآخر في المثال السابق إذا وضعنا قيمة  $s$  وهي ٣ في المعادلة (٢) نجد أن

$$١٦ = ٦ + s \quad s = ١٠$$

وهو عين الناتج المتقدم  $s = ١٠$   $\therefore$

(مثال ٢) لحل  $s = ٧ + ٢ = ٤٧$  ... (١)

(٢)  $s = ٥ - ٤ = ١$  ...

هنا يحسن حذف  $s$

وذلك بأن نضرب المعادلة (١) في ٢ فينتج أن

$$٩٤ = ٤ + s \quad s = ٩٠$$

ومن (٢) ينتج أن  $s = ٥ - ٤ = ١$

وبالجمع ينتج أن  $٩٥ = ١٩$

$s = ٥$   $\therefore$

وبتعويض  $s$  في (١) بهذه القيمة

ينتج أن  $٤٧ = ٢ + ٣٥$

$$\begin{cases} s = ٦ \\ s = ٥ \end{cases} \quad 6$$

(ملاحظة) نجمع المعادلتين حينما يكون معامل أحد المجهولين متساويين في القيمة ومتضادين في العلامة ونطرحهما حينما يكون معاملاه متساويين في القيمة ومتحدين في العلامة

(مثال ٣) لحل  $s = ٢$   $٥ + ١ =$  ... (١)

(٢)  $s = ٧ - ٣ =$  ...

نقول إنه يمكن في هذا المثال حذف  $s$  بأن نضع في المعادلة (٢) قيمتها الناتجة من المعادلة (١)

فينتج أن  $٢٤ - \frac{٧}{٢} = (١ + s) \quad s = ٣$

$٤٨ - ٣٥ = ٧ - ٦ = s$   $\therefore$

$٤١ = ٤١$   $\therefore$

$$\begin{cases} s = ١ \\ s = ٣ \end{cases} \quad \therefore$$

وبالتعويض في (١) ينتج أن

بند ١٠٤ - كل طريقة من طرق الحل التي بينها كافية لحل المعادلات الآتية إلا أن عملية الحل تسهل غالباً باتباع بعض الأساليب الحسابية

(مثال ١) لحل  $١٧١ - s = ٢١٣$   $s = ٦٤٢$  ... (١)

(٢)  $١١٤ - s = ٣٢٦$   $s = ٢٤٤$  ...

نقول لكوننا نرى أن لكل من العددين ١٧١ ٦ ١١٤ تاملا مشتركا وهو ٥٧ نجعل معامل الحرف  
 س في المعادلتين المضاعف المشترك البسيط للعددين ١٧١ ٦ ١١٤ وذلك بأن نضرب المعادلة (١)  
 في ٢ والمعادلة (٢) في ٣ فينتج أن

$$١٢٨٤ = ٣٤٢ س - ٤٢٦ ص$$

$$٧٣٢ = ٣٤٢ س - ٩٧٨ ص$$

$$٥٥٢ = ٥٥٢ ص$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ١ = ص \\ ٥ = س \end{array} \right.$$

وبالطرح ينتج أن

أى أن

وبالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن

$$(١) \dots \dots \dots ١٩٢٨ = ٥٩ س + ١٢٧ ص \quad \text{حل} \quad (٢) \text{ مثال}$$

$$(٢) \dots \dots \dots ١٧٩٢ = ١٢٧ س + ٥٩ ص$$

$$٣٧٢٠ = ١٨٦ س + ١٨٦ ص$$

$$(٣) \dots \dots \dots ٢٠ = س + ص$$

نجمع المعادلتين فينتج أن

:

$$\text{وبطرح (٢) من (١) ينتج أن} \quad ١٣٦ = ٦٨ س - ٦٨ ص$$

$$(٤) \dots \dots \dots ٢ = س - ص$$

فيؤول الأمر إلى حل المعادلتين

(٣) ٦ (٤) ومنهما نجد بالجمع أن

$$٢٢ = ٢ س$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ١١ = س \\ ٩ = ص \end{array} \right.$$

وبالطرح أن

أى أن

### (تمارين ١٣)

حل المعادلات الآتية [ولا بأس هنا بالاطلاع على البند ٤٢١]

$$(٧) ٨ س - ٣٤ = ص$$

$$٥٣ = ٨ س + ص$$

$$(٨) ١٥ س + ٢٩ = ص$$

$$٣٩ = ١٥ س + ص$$

$$(٩) ١٤ س - ٢٩ = ص$$

$$٣٥ = ١٧ س + ص$$

$$(١٠) ٢٨ س - ٣٣ = ص$$

$$٦٣ = ٢٥ س - ص$$

$$(١١) ٣٥ س + ٨٦ = ص$$

$$٥٦ = ١٣ س - ص$$

$$(١٢) ١٥ س + ٩٢ = ص$$

$$٥٥ = ٣٣ س - ص$$

$$(١) ٣ س + ٤ ص = ١٠$$

$$٩ = س + ص$$

$$(٢) ١٣ = ٢ س + ص$$

$$١٤ = ٣ س + ص$$

$$(٣) ٢٩ = ٧ س + ص$$

$$١١ = ٣ س + ص$$

$$(٤) ٢ س - ٩ = ص$$

$$١٩ = ٧ س - ص$$

$$(٥) ١٧ = ٦ س + ص$$

$$١٦ = ٥ س + ص$$

$$(٦) ١٠ = ٢ س + ص$$

$$٥٣ = ٨ س + ص$$

(١٨) ٨ = ٥ صه	(١٣) ٥ = ٧ صه - ٠
١ + ٨ = ١٣ صه	٧ = ٥ + ٧ صه
(١٩) ٣ = ٧ صه	(١٤) ٢١ = ٥٠ صه - ٦٠
١ - ٥ = ١٢ صه	٢٨ = ٢٧ صه - ١٩٩
(٢٠) ١٩ + ١٧ صه = ٠	(١٥) ٣٩ = ٨ صه - ٩٩
٢ = ٥٣ صه -	٥٢ = ١٥ صه - ٨٠
(٢١) ٩٣ + ١٥ صه = ١٢٣	(١٦) ٥ = ٧ صه - ٢١
١٥ + ٩٣ صه = ٢٠١	٢١ = ٩ صه - ٧٥
	(١٧) ٦ = ٥ صه - ١٨
	١٢ = ٩ صه - ٠

بند ١٠٥ - نأى الآن ببعض أمثلة يجب فيها اختصار المعادلات قبل الشروع في حلها  
 (مثال ١) حل ٥ = (٢ صه) - (٣ صه + ١١ صه) = ١٤ ... (١)  
 ٧ = ٩ صه - ٣ (٢ صه - ٤ صه) = ٣٨ ... (٢)  
 نقول إنه من (١) نجد أن

$$\begin{aligned} ٥ &= ١٠ + ٣ صه - ٣ صه - ١١ صه = ١٤ \\ (٢) \dots \dots \dots ١٤ &= ٢ صه - ٣ صه - ١١ صه \\ \text{ومن (٢) نجد أن} \quad ٧ &= ٩ صه - ٣ صه - ١٢ صه = ٣٨ \\ (٤) \dots \dots \dots ٣٨ &= ٤ صه + ٣ صه - ٢٨ صه \\ \text{ومن (٣) نجد أن} \quad ٦ &= ٣ صه - ٤٢ صه \\ \text{وبالجمع ينتج أن} \quad ١٠ &= ٨٠ صه \\ \text{أى أن} \quad ٨ &= ٢ صه \\ \text{ومن (٣) نستنتج أن} \quad ٢ &= ٤ صه \end{aligned}$$

(مثال ٢) حل المعادلتين  
 (١) ...  $\frac{٢-٣}{٤} = \frac{٥-٣}{٧}$  ...  
 (٢) ...  $\frac{٤+٣}{٥} - \frac{١}{٢} = (٢ صه - ٥) = ٣ صه$  ...  
 نبدأ بإزالة الكسور فينتج من (١) أن

$$\begin{aligned} ٤٢ صه - ٢ صه - ٢٨ صه &= ١٠ + ٣ صه \\ (٣) \dots \dots \dots ٣١ &= ١٤ صه - ٢ صه - ٣ صه \\ \text{وينتج من (٢) أن} \quad ٩ &= ١٢ صه + ١٥ صه - ٢٥ صه = ١٥ صه \\ (٤) \dots \dots \dots ٣٧ &= ١٠ صه + ٦ صه \\ \text{وبحذف صه من (٣) ٦ (٤) ينتج أن} \quad ١٤ &= ١٣ صه \\ \text{وبحذف صه من (٣) ٦ (٤) ينتج أن} \quad ٢٠٧ &= ٢١ صه \end{aligned}$$

(ملاحظة) نجد أحيانا كما ظهر لنا الآن أن الأسهل استخراج قيمة المجهول الثانى بطريقة الحذف كما فى المثال المتقدم لا بطريقة تمويض قيمة المجهول الأول فى إحدى المعادلات



## (تمارين ١٣ ب)

حل المعادلات الآتية

(٩) $٠ = صه + سه ٢$	(١) $١٦ = صه + سه ٢$
$٨ = صه - سه ٢$	$١٤ = صه + سه$
(١٠) $١ \frac{٢}{٧} = صه + سه$	(٢) $٥ = صه + سه$
$٤ \frac{٢}{٣} = صه + سه$	$٤ = صه - سه$
(١١) $٠ = صه - سه ٧$	(٣) $٣ = صه - سه ٥$
$٧ = صه + سه \frac{٢}{٧}$	$٨ = صه - سه$
(١٢) $٠ = صه - سه$	(٤) $٥ = صه - سه$
$١٧ = صه + سه ٣$	$٢ = صه - سه$
(١٣) $٣٧ - صه - سه ٢ = صه + سه$	(٥) $١٠ = صه + سه$
$٠ =$	$٥٠ = صه + سه$
(١٤) $\frac{صه - سه}{٨} = \frac{٥ - صه}{٢} = \frac{١ + سه}{١٠}$	(٦) $٣ = سه$
(١٥) $\frac{٣(صه + سه)}{٨} = \frac{صه - ٨}{٤} = \frac{٢ + سه}{٥}$	$٣٤ = صه + سه$
(١٦) $٨ - صه - سه ١٠ = سه - سه \frac{١}{١٣}$	(٧) $٣ = سه - سه \frac{١}{١٣}$
$٠ =$	$٢٠ = صه - سه$
	(٨) $٤ = سه - سه \frac{١}{١٥}$
	$٣ = سه + سه \frac{١}{١٥}$

بند ١٠٦ - علمنا مما سبق ضرورة وجود معادلتين إذا كنا نبحث عن قيمة مجهولين أما إذا كانت المجهيل ثلاثة فينبغي أن يكون عدد المعادلات ثلاثاً وفي هذه الحالة تكون قاعدة الحل ما يأتي (قاعدة) لحذف أحد المجهيل من أى معادلتين من المعادلات الثلاث ثم احذف المجهول نفسه من معادلتين أخريين فتصبح معادلتان بمجهولين تحلان حسب القواعد السابقة ثم تستخرج قيمة المجهول الثالث بطريقة التعويض في أى معادلة من المعادلات الثلاث

(مثال ١) لحل  $٦ سه + ٢ صه - ٥ ع = ١٣$  ... (١)  
 $٣ سه + ٣ صه - ٢ ع = ١٣$  ... (٢)  
 $٧ سه + ٥ صه - ٣ ع = ٢٦$  ... (٣)

نفرض أن المجهول الذى اخترنا حذفه صه

فنعرب (١) في ٣ (٢) في ٢ فينتج أن

$$١٨ سه + ٦ صه - ١٥ ع = ٣٩$$

$$٦ سه + ٦ صه - ٤ ع = ٢٦$$

(٤)  $١٢ سه - ١١ ع = ١٣$  ...

وبالطرح ينتج أن

ثم ضرب (١) في ٥ ٦ (٣) في ٢ فيحصل أن

$$٣٠ \text{ ص} + ١٠ \text{ ح} - ٢٥ \text{ ع} = ٦٥$$

$$١٤ \text{ ص} + ١٠ \text{ ح} - ٦ \text{ ع} = ٥٢$$

وبالطرح ينتج أن (٥) ... .. ١٣ = ٤١٩ - ٤١٩

وبضرب (٤) في ٤ ٦ (٥) في ٣ ينتج أن

$$٤٨ \text{ ص} - ٤٤ \text{ ح} = ٥٢$$

$$٤٨ \text{ ص} - ٥٧ \text{ ح} = ٣٩$$

$$١٣ = ٤١٣$$

وبالطرح ينتج أن

$$\begin{cases} ١ = \text{ع} \\ ٢ = \text{ح} \\ ٣ = \text{ص} \end{cases}$$

ومن (٤) ينتج أن

ومن (١) ينتج أن

(ملاحظة) بعد قليل من التمرن يمكن الطالب أن يسهل العمل كثيرا بربط المعادلات بعضها مع بعض على الوجه المناسب

ففي المثال السابق لو أضفنا (١) إلى (٢) وطرحنا من الحاصل (٣) لبقى ٢ ص - ٤ ع = ٠  
أي أن ص = ٢ ع وبوضع هذه القيمة في (١) ٦ (٢) نتيج معادلتان سهلتا الحل مشتملتان على المجهولين ص ٦ ع فقط

ومن المفيد أحيانا أن لا يتبع نص القاعدة السابقة تماما كما سنبينه فيما يلي

(مثال ٢) لحل  $٢ + \frac{\text{ع}}{٧} = ١ + \frac{\text{ص}}{٦} = ١ - \frac{\text{ح}}{٢}$

$$١٣ = \frac{\text{ع}}{٦} + \frac{\text{ص}}{٦}$$

$$١ + \frac{\text{ص}}{٦} = ١ - \frac{\text{ح}}{٢}$$

نستنتج من المعادلة أن (١) ... .. ١٢ = ٣ - ٣

$$٢ + \frac{\text{ع}}{٧} = ١ - \frac{\text{ح}}{٢}$$

وأيضا نستنتج من المعادلة أن (٢) ... .. ٤٢ = ٢ - ٢

$$١٣ = \frac{\text{ع}}{٦} + \frac{\text{ص}}{٦}$$

وكذلك نستنتج من المعادلة أن (٣) ... .. ٧٨ = ٣ + ٣

وبحذف ع من (٢) ٦ (٣) ينتج أن

$$٢١ \text{ ص} + ٤ \text{ ح} = ٢٨٢$$

ومن (١) نجد أن ١٢ ص - ٤ ح = ٤٨

إذن ١٨ = ١٠ ص ٦ ص

وبالتعويض في (٢) نجد أن ١٤ = ع

(مثال ٣) إذا تأملنا المعادلات الآتية

(١) ... .. ٦ = ع - ٣ ص

(٢) ... .. ١٤ = ع + ٣ ص - ٧

(٣) ... .. ٨ = ص - ٤ ح

نجد أننا لو ضربنا (١) في ٣ وأضفنا حاصل الضرب إلى (٢) ينتج أن

$$٢٨ \text{ سر} - ١٦ \text{ صه} = ٣٢$$

$$\text{أى أن} \quad ٧ \text{ سر} - ٤ \text{ صه} = ٨$$

فيظهر من هذا أن ما عملناه في المعادلتين (١) و (٢) أوجد معادلة هي عين المعادلة الثالثة وعلى ذلك يكون لدينا معادلة واحدة فقط لاستخراج قيمة كل من الجهولين سر ٦ صه وهي ٧ سر - ٤ صه = ٨ وهي معادلة غير معينة الحل (راجع بند ١٠٠)

ومثل هذه النتيجة ينشأ من كون المعادلات غير مستقل بعضها عن بعض بمعنى أن كل معادلة يمكن استنتاجها من المعادلات الأخرى أى أن العلاقة بين الجهيل في كل معادلة ليست خاصة بها بل هي عينها بين الجهيل في المعادلات الأخرى

### (تمارين ١٣ - ٥)

حل المعادلات الآتية

$\begin{aligned} (٥) \quad ١٦ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٩ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٣ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ (٦) \quad ٢ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ١ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٩ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ (٧) \quad ٢٠ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٧٠ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٤١ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ (٨) \quad ٢٠ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٢٦ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٣١ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \end{aligned}$	$\begin{aligned} (١) \quad ١١ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٧ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ١٤ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ (٢) \quad ١٤ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٧ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٢ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ (٣) \quad ١٧ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ١٦ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ١١ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ (٤) \quad ٢ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٥ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \\ ٦ &= ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} \end{aligned}$
---	--

$$(٩) \quad ٣ \text{ سر} - ٤ \text{ صه} = ١٦ - ٤ \text{ ع} - ٥ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = ١٥ - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = ١٠ - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه}$$

$$(١٠) \quad ١٠ = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه}$$

$$(١١) \quad ٢٧ = ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه}$$

$$(١٢) \quad ١ + ٢ \text{ سر} = ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه}$$

$$(١٣) \quad ٣ = ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه}$$

$$(١٤) \quad ١١ = ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه}$$

$$(١٥) \quad ١١ = ع + ٢ \text{ سر} + ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه} = \frac{٤}{٣} - ٤ \text{ ع} - ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ صه}$$

$$(١٦) \quad ١٠ + \frac{٤}{٣} = ٢٠ + \text{سر} = ٥ + ع + ٢ \text{ سر} = ١١٠ = (ع + ٢ \text{ سر}) - ١١٠ =$$

من (۴) ینج ان

## (تمارين ١٣ د)

حل المعادلات الآتية

$42 = \frac{27}{ص} + \frac{4}{ص} \quad (٩)$	$3 = \frac{1}{ص} + \frac{5}{ص} \quad (١)$
$1 = \frac{10}{ص} - \frac{14}{ص}$	$4 = \frac{3}{ص} + \frac{10}{ص} \quad (٢)$
$\frac{8}{ص} = \frac{5}{ص} + \frac{2}{ص} \quad (١٠)$	$2 = \frac{7}{ص} - \frac{1}{ص} \quad (٣)$
$\frac{10}{ص} = 22 - ص$	$3 = \frac{14}{ص} + \frac{2}{ص}$
$2 = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} \quad (١١)$	$2 = \frac{4}{ص} - \frac{12}{ص} \quad (٤)$
$1 = \frac{1}{ص} - \frac{1}{ص}$	$0 = \frac{1}{ص} - \frac{2}{ص}$
$2 - ص = 4 - ص \quad (١٢)$	$79 = \frac{11}{ص} + \frac{5}{ص} \quad (٥)$
$9 = \frac{3}{ص} - \frac{4}{ص}$	$44 = \frac{1}{ص} - \frac{17}{ص}$
$0 = 4 + \frac{2}{ص} - \frac{1}{ص} \quad (١٣)$	$5 = \frac{17}{ص} + \frac{21}{ص}$
$0 = 1 + \frac{1}{ص} - \frac{1}{ص}$	$\frac{1}{23} = \frac{1}{ص} - \frac{1}{ص}$
$14 = \frac{2}{ص} + \frac{1}{ص}$	$30 = \frac{2}{ص} + \frac{5}{ص} \quad (٦)$
$36 = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} \quad (١٤)$	$2 = \frac{1}{ص} - \frac{1}{ص}$
$28 = \frac{1}{ص} - \frac{2}{ص} + \frac{1}{ص}$	$7 = \frac{9}{ص} - \frac{8}{ص} \quad (٧)$
$20 = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص}$	$1 = (\frac{1}{ص} + \frac{1}{ص}) \quad (٨)$
$\frac{2}{ص} - \frac{6}{ص} = \frac{1}{ص} - \frac{1}{ص} \quad (١٥)$	$1 = \frac{24}{ص} + \frac{20}{ص}$
$4 = \frac{10}{ص} + \frac{7}{ص}$	$7 = (\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص}) \quad (٩)$

## الباب الرابع عشر - مسائل تؤدي إلى معادلات آتية

بند ١٠٨ - قد رأينا فيما بحثنا فيه من الأمثلة الواردة في الباب السابق أنه من الضروري أن يساوي عدد المعادلات عدد المجاهيل المراد البحث عن قيمة كل منها فكل المسائل التي يتوصل إلى حلها باستعمال معادلات آتية يجب أن تحتوي منطوق المسئلة على فروض مستقل بعضها عن بعض [أي لا ينتج أحدها من الآخر] وأن تكون هذه الفروض مساوية في العدد للكميات المجهولة المراد استخراج مقاديرها

(مثال ١) ما العددين اللذان فرقهما ١١ ونحس مجموعهما ٩

نفرض أن أكبر العددين  $ص$  وأصغرهما  $ص$ 

(١)  $ص - ص = 11$

إذن

$ص + ص = 9$

6

(٢)  $ص + ص = 45$

أو

$2 ص = 56$

وبالجمع يحدث أن

$2 ص = 34$

وبالطرح ينتج أن

فالعقدان هما ٢٨ ٦ ١٧ وظاهر أن منطوق المسألة يحتوى على فرضين مستقل كل منهما عن الآخر تمام الاستقلال كما أنه ظاهر أن منطوقها يتضمن طلب البحث عن مجهولين (مثال ٢) إذا كان ثمن ١٥ رطلا من الشاي ٦ ١٧ رطلا من البن معا  $\frac{1}{4}$  ٣٢٢ و ثمن ٢٥ رطلا من الشاي ٦ ١٣ رطلا من البن معا  $\frac{1}{4}$  ٤٢٢ فما ثمن كل رطل من الصنفين  
نفرض أن ثمن الرطل من الشاي  $x$  من القروش و ثمن الرطل من البن  $y$  من القروش  
فنجد من منطوق المسألة أن

$$(١) \dots\dots\dots ٣٢٢ \frac{1}{4} = ١٧x + ١٥y$$

$$(٢) \dots\dots\dots ٤٢٢ \frac{1}{4} = ١٣x + ٢٥y$$

وبضرب المعادلة (١) في ٥ والمعادلة (٢) في ٣ يتبع أن

$$١٦١٢ \frac{1}{4} = ٨٥x + ٧٥y$$

$$١٢٦٧ \frac{1}{4} = ٣٩x + ٧٥y$$

$$٣٤٥ = ٤٦x$$

وبالطرح يحدث أن

$$٧ \frac{1}{4} = ٧y$$

∴

$$\text{ومن المعادلة (١) يتبع أن } ١٥ = ١٢٧ \frac{1}{4} - ٣٢٢ \frac{1}{4}$$

$$١٩٥ = ١٥x$$

أى أن

$$١٣ = x$$

∴

$$\text{إذن يكون ثمن الرطل من الشاي } ١٣ \text{ و ثمن الرطل من البن } ٧ \frac{1}{4}$$

وظاهر هنا أيضا أن منطوق المسألة يتضمن فرضين مستقل كل منهما عن الآخر تمام الاستقلال كما أنه يتضمن طلب البحث عن مجهولين

(مثال ٣) صرف شخص ٨٣ في شراء برتقال و تفاح فدفق قرشا في كل ٣ برتقالات وقرشين في كل ١٢ تفاحة ولو أنه اشترى خمسة أضعاف ما اشترى من البرتقال وربع ما اشترى من التفاح لباع ثمن ذلك  $\frac{2}{3}$  فما عدد التفاح والبرتقال الذى اشتراه

نفرض أن  $x$  عدد البرتقال و  $y$  عدد التفاح

$$\text{فيكون ثمن } x \text{ من البرتقال} = \frac{2}{3}x \text{ قرشا}$$

$$\text{و ثمن } y \text{ من التفاح} = \frac{2}{12}y \text{ قرشا}$$

$$(١) \dots\dots\dots ٨٣ = \frac{2}{3}x + \frac{2}{12}y$$

∴

$$٥ = x \text{ من البرتقال} = ٥ \times \frac{1}{4} \text{ أو } \frac{5}{4} \text{ قرشا}$$

وكذا ثمن

$$\frac{5}{4} = y \text{ من التفاح} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{12} \text{ أو } \frac{5}{24} \text{ قرشا}$$

و ثمن

$$(٢) \dots\dots\dots ٢٦٣ = \frac{5}{24}y + \frac{5}{4}x$$

∴

ويضرب المعادلة (١) في ٥ وطرح المعادلة (٢) من حاصل الضرب ينتج أن

$$١٥٢ = ص - \left( \frac{١}{٢٤} - \frac{٥}{٦} \right)$$

$$١٥٢ = \frac{١٩}{٢٤} ص$$

∴

$$١٩٢ = ص$$

∴

ومن (١) ينتج أن  $١٥٣ = ص$

وعليه يكون عدد البرتقال ١٥٣ وعدد التفاح ١٩٢

(مثال ٤) ما الكسر الذي إذا أضفب اثنان إلى بسطه ووحد إلى مقامه يساوى  $\frac{٥}{٨}$  وإذا طرح من كل من بسطه ومقامه واحد يساوى  $\frac{١}{٢}$

نفرض أن  $ص$  بسط الكسر  $٦$  مقامه

فالكسر إذن

$$(١) \dots \dots \dots \frac{٥}{٨} = \frac{٢+ص}{١+ص}$$

$$(٢) \dots \dots \dots \frac{١}{٢} = \frac{١-ص}{١-ص}$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج أن  $٨ = ص$   $٦ = ص$   $١٥ = ص$

$$\frac{٨}{١٥}$$

فالكسر إذن

(مثال ٥) الرقم الأوسط من عدد أكبر من المائة وأصغر من الألف صفر ومجموع الرقمين الآخرين ١١ وإذا انعكس وضع هذين الرقمين يزيد العدد الناتج على العدد الأصلي بمقدار ٤٩٥ فما العدد

نفرض أن  $ص$  رقم الآحاد  $٦$  ص رقم المئات ومن حيث إن الرقم الأوسط صفر فالعدد إذن

$$١٠٠ ص + ص (راجع بند ٨١ المثال الرابع)$$

وإذا انعكس وضع الرقمين يكون العدد الناتج  $١٠٠ ص + ص$

$$٤٩٥ = ١٠٠ ص + ص - (١٠٠ ص + ص)$$

$$٤٩٥ = ١٠٠ ص + ص - ١٠٠ ص - ص$$

$$٤٩٥ = ٩٩ ص - ٩٩ ص$$

أو

$$(١) \dots \dots \dots ٥ = ص - ص$$

وبما أن مجموع الرقمين ١١ والرقم الأوسط صفر يكون

$$(٢) \dots \dots \dots ١١ = ص + ص$$

ومن (١)  $٦$  (٢) نجد أن  $٨ = ص$   $٦ = ص$   $٣ = ص$

فالعدد إذن

## (تمارين ١٤)

- (١) ما العدنان اللذان مجموعهما ٣٤ وفرقهما ١٠
- (٢) مجموع عددين ٧٣ وفرقهما ٣٧ فما العدنان
- (٣) ثلث مجموع عددين ١٤ ونصف فرقهما ٤ فما العدنان
- (٤) جزء من تسعة عشر من مجموع عددين ٤ وفرق العددين ٣٠ فما العدنان
- (٥) نصف مجموع عددين ٢٠ وثلاثة أمثال فرقهما ١٨ فما العدنان
- (٦) ثمن ستة أرطال من الشاي واحد عشر رطلا من السكر ١٠٧ وثمان ١١ رطلا من الشاي وستة أرطال من السكر ١٨٢ فما ثمن كل رطل من الصنفين
- (٧) إذا أمكن شخصا أن يشتري ستة خيول وسبع بقرات بمائتين وخمسين جنيها و١٣ بقرة و١١ حصانا بأربعمائة وواحد وستين جنيها فما ثمن الحصان وما ثمن البقرة
- (٨) أ ب ٦ ب ٦ ح ٦ د يملكون ٢٩٠ جنيها وما مع أ ضعف ما مع ح وما مع ب ثلاثة أمثال ما مع د وجملة ما مع ح د تنقص عما مع أ بمقدار ٥٠ جنيها فما يملك كل منهم
- (٩) أ ب ٦ ب ٦ ح ٦ د يملكون ٢٧٠ جنيها وما مع أ ثلاثة أمثال ما مع ح وما مع ب خمسة أمثال ما مع د وجملة ما مع أ ب أقل من ثمانية أمثال ما مع ح بخمسين جنيها فما يملك كل منهم
- (١٠) أربعة أمثال عمر ب يزيد ٢٠ سنة عن عمر أ وثلث عمر أ أقل من عمر ب بستين فما عمر كل منهما
- (١١) جزء من أحد عشر من عمر أ يزيد ستين على  $\frac{1}{4}$  عمر ب وضعف عمر ب يساوي ما كان يساويه عمر أ قبل ثلاث عشرة سنة فما عمر كل منهما
- (١٢) أ يمشى في ٨ ساعات ١٢ كيلومترا زيادة على ما يمشيه ب في ٧ ساعات ٦ ب يمشى في ١٣ ساعة ٧ كيلومترات زيادة على ما يمشيه أ في تسع ساعات فما سرعة كل منهما بالكيلومتر في الساعة
- (١٣) ح يمشى في إحدى عشرة ساعة أقل مما يمشيه د في اثني عشرة ساعة بمقدار  $\frac{1}{4}$  ١٢ من الكيلومترات ٦ د يمشى في خمس ساعات أقل مما يمشيه ح في سبع ساعات بمقدار  $\frac{1}{4}$  ٣ من الكيلومترات فما سرعة كل منهما بالكيلومتر في الساعة
- (١٤) ما الكسر الذي إذا أضيف إلى مقامه ١ يصير  $\frac{1}{4}$  وإذا أضيف إلى بسطه ٢ يصير  $\frac{3}{4}$
- (١٥) ما الكسر الذي يساوي  $\frac{1}{4}$  إذا طرح ١ من بسطه وأضيف ٢ إلى مقامه و  $\frac{1}{4}$  إذا طرح ٧ من بسطه وطرح ٢ من مقامه
- (١٦) ما الكسر الذي إذا أضيف ١ إلى بسطه يصير  $\frac{1}{4}$  وإذا طرح ١ من مقامه يصير  $\frac{1}{4}$
- (١٧) ما الكسر الذي إذا أضيف  $\frac{2}{3}$  إلى بسطه يزيد بمقدار  $\frac{1}{12}$  وإذا طرح  $\frac{1}{4}$  من مقامه يصير  $\frac{2}{3}$
- (١٨) إذا أضيف عدد مكون من رقمين إلى العدد الحاصل من عكس وضع الرقمين كان الناتج ١١٠ فما العدنان مع العلم بأن فرق الرقمين ٦



(١٩) مجموع رقمي عدد ١٣ والفرق بينه وبين العدد المكوّن من هذين الرقمين معكوسى الوضع ٢٧  
فما العدد

(٢٠) إذا كان عدد مركب من رقمين يساوى ثلاثة أمثال مجموعهما وإذا أضيف إليه ٤٥ ينتج عدد  
يساوى العدد الناتج من عكس وضعي الرقمين فما العدد

(٢١) عدد أكبر من العشرة وأقل من المائة يساوى ٨ أمثال مجموع رقميه وإذا طرح منه ٤٥ نتج  
عدد يساوى العدد الناتج من عكس وضعي رقميه فما العدد

(٢٢) رجل عنده عدد من القطع ذات العشرين قرشا وعدد آخر من ذات القرشين ولاحظ أنه  
إذا صار عدد القطع ذات العشرين قرشا قطعاً من ذات القرشين صار عدد القطع ذات

القرشين قطعاً من ذات العشرين قرشا تزيد قيمة نفقده ١٠٨ ولكن إذا صار عدد القطع  
ذات العشرين قرشا قطعاً من ذات العشرة القروش صار عدد القطع ذات القرشين قطعاً من

ذات الخمسة القروش ينقص ما معه بقدر ١٧ فما عدد القطع التي يملكها الرجل من كل نوع

(٢٣) كيس يشتمل على كرات بيضاء وأخرى سوداء ونصف الكرات البيضاء يساوى ثلث السوداء  
وضعف الكرات جميعها يزيد أربعة على ثلاثة أمثال عدد السوداء فكم كرة في الكيس

(٢٤) عدد مركب من ثلاثة أرقام أيمنها صفر وإذا وضع الأوسط والأيسر كل موضع الآخر ينقص  
العدد ١٨٠ وإذا وضع بدل رقم اليسار نصفه وحل الأيمن والأوسط كل موضع الآخر ينقص  
العدد ٤٥٤ فما العدد

(٢٥) أجرة ١٠ رجال ٨ وأولاد ١٨٥ فإذا كانت أجرة ٤ رجال تزيد ٥ على أجرة ستة أولاد فما  
أجرة كل من الرجل والولد

(٢٦) x يقال يريد أن يخلط نوعاً من التوابل ثمن الكيلوجرام منه ٨٠ بنوع آخر سعر الكيلوجرام  
منه ٥٠ بحيث تكون زنة المخلوط ٦٠ كيلوجراماً يبيعها بسعر الكيلوجرام الواحد ٦٠ فكم  
كيلوجراماً يأخذ من كل نوع ليكون المخلوط

(٢٧) x قطع سائح مسافة ولو أنه سار بسرعة تزيد نصف كيلومتر في الساعة على السرعة التي سار بها  
لما احتاج إلا إلى  $\frac{1}{3}$  الزمن الذي استغرقه في السير ولو أنه سار بسرعة تنقص نصف كيلومتر  
في الساعة عن السرعة التي سار بها لاحتاج إلى زمن يزيد بمقدار ساعتين ونصف ساعة على  
الزمن الذي استغرقه في السير فما المسافة التي قطعها

(٢٨) x مشى رجل ٣٥ كيلومتراً بعضها بسرعة ٤ كيلومترات في الساعة والباقي بسرعة ٥ كيلومترات  
في الساعة ولو أنه مشى بسرعة ٥ كيلومترات في الساعة ما مشاه بسرعة ٤ كيلومترات في الساعة  
ومشى بسرعة ٤ كيلومترات في الساعة ما مشاه بسرعة ٥ كيلومترات في الساعة لا استطاع أن يقطع  
كيلومتريّن زيادة على ما مشاه في الوقت عينه فما الزمن الذي استغرقه في قطع هذه المسافة

(٢٩) شرع مسافران في السير في وقت واحد وكانت المسافة بينهما ٣٧ كيلومتراً ولو سارا في اتجاه واحد  
لتلاقيا بعد ٩ ساعات ولو سارا في اتجاهين متضادين لتلاقيا بعد ٣ ساعات فما سرعة سير كل منهما

(٣٠) تنفق أسرة مكونة من ثلاثة أشخاص بالنين وخمسة أطفال  $\frac{1}{187}$  في الأسبوع على الطعام ولكنها اضطرت من الفقر أن تنقص ذلك إلى  $\frac{1}{100}$  في الأسبوع فأصبح البالغ يتناول من الطعام نصف ما كان يتناوله قبلا والطفل ثلثي ما كان يتناوله فما مقدار ما كان يصرف على كل بالغ وعلى كل طفل في الأسبوع قبل الفقر

(٣١) إقترض شخص مبلغا بسعر ٦٪. وبلغت الفائدة في زمن معين مبلغا يزيد على رأس المال مقدار مائة جنيه فإذا علم أنه إذا اقترض المبلغ عينه بسعر ٣٪ لمدة تساوى ربع المدة الأولى زاد رأس المال على الفائدة مقدار ٤٢٥ جنيها فكم كان رأس المال

(٣٢) قطع مسافة ٣٠ كيلومترا ماشيا في زمن يزيد على ما يستغرقه ب في قطعها ٣ ساعات ولوضاعف أ سرعته لقطع تلك المسافة في زمن يقل عما يستغرقه ب ساعتين فما سرعة كل منهما

## الباب الخامس عشر - الرفع إلى القوى

بند ١٠٩ - تعريف: الرفع إلى قوة اسم عام يطلق على ضرب مقدار في نفسه للحصول على قوته الثانية أو الثالثة أو الرابعة وهلم جرا

ويمكن دائما إيجاد أى قوة باجراء عملية الضرب ولكن سدين فيما يأتى قواعد يمكننا أن نعرف بها بمجود النظر

(١) أى قوة لأى مقدار بسيط

(٢) مربع أو مكعب أى مقدار ذى حدين

(٣) مربع أى مقدار كثير الحدود

بند ١١٠ - يتضح من قانون العلامات أن

(أولا) القوة الزوجية لأى مقدار لا تكون سالبة أبدا

(ثانيا) علامة القوة الفردية لأى مقدار هى عين علامة ذلك المقدار

(ملاحظة) مما تجب ملاحظته أن مربع أى مقدار سواء كان سالبا أو موجبا موجب دائما

بند ١١١ - ينتج من التعريف المتقدم ومن قواعد الضرب الجبرى أن

$$٦ = ٢ \cdot ٢ \cdot ٢ = ٢ \cdot ٢ \cdot ٢ = ٢ \cdot ٢ \cdot ٢$$

$$(-٢)^3 = (-٢) \cdot (-٢) \cdot (-٢) = ٢ \cdot ٢ \cdot (-٢) = -٢^3$$

$$(-٢)^4 = (-٢) \cdot (-٢) \cdot (-٢) \cdot (-٢) = ٢ \cdot ٢ \cdot ٢ \cdot ٢ = ٢^4$$

$$(-٢)^5 = (-٢) \cdot (-٢) \cdot (-٢) \cdot (-٢) \cdot (-٢) = -٢^5$$

ومن هنا تنتج القاعدة الآتية لرفع أى مقدار جبرى بسيط لقوة ما

(قاعدة ١) نرفع المعامل إلى القوة المطلوبة بواسطة الحساب ونضع أمام الناتج العلامة اللائقة التي يمكن إيجادها باتباع قانون العلامات

(قاعدة ٢) نضرب أس كل عامل من عوامل المتدار في أس القوة المراد الرفع إليها

$$(أمثال) \quad (-2x^2)^3 = -8x^6$$

$$6 \quad (-3x^2)^3 = -27x^6$$

$$6 \quad \left(\frac{2x^2}{3}\right)^3 = \frac{8x^6}{27}$$

ويلاحظ أننا في المثال الأخير أوجدنا قوة البسط والمقام كل على حدة

### (تمارين ١٥)

اكتب مربع كل من المقادير الآتية

(١) $3x^2$	(٦) $5x^2$	(١١) $\frac{2x^2}{3}$	(١٦) $-2x^2$
(٢) $2x^2$	(٧) $-12x^2$	(١٢) $-\frac{4x^2}{3}$	(١٧) $\frac{5x^2}{2}$
(٣) $17x^2$	(٨) $-3x^2$	(١٣) $-\frac{17x^2}{3}$	(١٨) $13x^2$
(٤) $11x^2$	(٩) $4x^2$	(١٤) $\frac{11x^2}{4}$	(١٩) $-\frac{1}{44}$
(٥) $4x^2$	(١٠) $-\frac{2}{3}x^2$	(١٥) $-\frac{1}{2x^2}$	(٢٠) $-\frac{92}{5x^2}$

اكتب مكعب كل من المقادير الآتية

(٢١) $12x^2$	(٢٤) $3x^2$	(٢٧) $16x^2$	(٣٠) $-\frac{3x^2}{15}$
(٢٢) $3x^2$	(٢٥) $-15x^2$	(٢٨) $-17x^2$	(٣١) $7x^2$
(٢٣) $4x^2$	(٢٦) $-2x^2$	(٢٩) $\frac{1}{3x^2}$	(٣٢) $-\frac{2}{9}$

اكتب قيمة كل من المقادير الآتية

(٣٣) $(3x^2)^2$	(٣٥) $(-2x^2)^3$	(٣٧) $\left(\frac{2x^2}{3}\right)^3$	(٣٩) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$
(٣٤) $(-1x^2)^3$	(٣٦) $\left(\frac{1}{12}\right)^3$	(٣٨) $\left(\frac{2x^2}{3}\right)^3$	(٤٠) $\left(-\frac{2}{43}\right)^3$

بند ١١٢ - لو أجرينا عملية الضرب فيما يأتي لوجدنا أن

$$(a+1)(a+1) = (a+1)^2$$

$$(1) \quad \dots \dots \dots a^2 + a + 1 =$$

$$(a-1)(a-1) = (a-1)^2$$

$$(2) \quad \dots \dots \dots a^2 - a - 1 =$$

ويعبر عن هاتين النتيجةين بالقاعدتين الآتيتين

(قاعدة ١) مربع مجموع كيتين يساوى مجموع مربعيهما مضافا إليه ضعف حاصل ضربيهما

(قاعدة ٢) مربع الفرق بين كيتين يساوى مجموع مربعيهما مطروحا منه ضعف حاصل ضربيهما

$$\text{(مثال ١)} \quad (٢ + ٣)^2 = ٢^2 + ٣^2 + ٢ \times ٣ = ٤ + ٩ + ٦ = ٢٥$$

$$= ٢^2 + ٤ \times ٣ + ٣^2$$

$$\text{(مثال ٢)} \quad (٣ - ٢)^2 = ٣^2 - ٢^2 - ٢ \times ٣ + ٣ \times ٢ = ٩ - ٤ - ٦ + ٦ = ١$$

$$= ٩ - ٤$$

بند ١١٣ - يستحسن أحيانا استعمال هاتين القاعدتين في إيجاد مربعات الأعداد

$$\text{(مثال ١)} \quad \text{مربع } ١٠١٢ = (١٠٠٠ + ١٢)^2$$

$$= ١٠٠٠^2 + ٢ \times ١٠٠٠ \times ١٢ + ١٢^2 =$$

$$= ١٠٠٠٠٠٠ + ٢٤٠٠٠ + ١٤٤ =$$

$$= ١٠٢٤١٤٤$$

$$\text{(مثال ٢)} \quad \text{مربع } ٩٨ = (١٠٠ - ٢)^2$$

$$= ١٠٠^2 - ٢ \times ١٠٠ \times ٢ + ٢^2 =$$

$$= ١٠٠٠٠ - ٤٠٠ + ٤ =$$

$$= ٩٦٠٤$$

ويمكن اختصار العمل كثيرا إذا أهملت الخطوتان الأولى والثانية أثناء العمل

بند ١١٤ - الآن يمكن التوسع في تطبيق القاعدتين المدققتين في البند ١١٢ على الوجه الآتى

$$(١ + ب + ج)^2 = (١ + ب)^2 + ج^2 + ٢(١ + ب)ج$$

$$= (١ + ب)^2 + ج^2 + ٢(١ + ب)ج \quad \text{(بند ١١٢ القاعدة الأولى)}$$

$$= ١ + ب + ب^2 + ج^2 + ٢ج + ٢بج + ٢ج$$

وبالطريقة نفسها يمكن أن نبرهن على أن

$$(١ + ب - ج)^2 = ١ + ب + ب^2 - ج^2 - ٢ج + ٢بج - ٢ج$$

$$\text{وأن } (١ + ب + ج + د)^2 = ١ + ب + ب^2 + ج^2 + د^2 + ٢بج + ٢ج + ٢د + ٢بج + ٢ج + ٢د + ٢ج + ٢د + ٢ج + ٢د$$

$$+ ٢د + ٢ج + ٢د + ٢ج + ٢د + ٢ج + ٢د + ٢ج + ٢د + ٢ج + ٢د$$

وفى كل من هذه الأمثلة نرى أن المربع مركب من

(١) مجموع مربعات الحدود المكون منها المقدار

(٢) ضعف مجموع حواصل ضرب الحدود مأخوذة متتيا مع مراعاة قانون العلامات فى كل

منها بمعنى أن تكون العلامة + أو - فى كل حاصل حسب اتحاد علامتى

المقادير المكون منها ذلك الحاصل أو اختلافهما

(ملاحظة) الحدود المرفوعة إلى القوة الثانية لا تكون إلا موجبة والقوانين السابقة تسرى على أى

مقدار يراد تربيعه مهما بلغ عدد حدوده

(قاعدة) لايجاد مربع أى مقدار كثير الحدود نربع كل حد من الحدود الداخلة فيه ونضم إلى مجموع تلك المربعات ضعف حاصل ضرب كل حد منه فى كل حد من الحدود التى تتلوها مأخوذة الواحد بعد الآخر على الترتيب ويراعى فى علامات الحواصل الضرب ما جاء فى قانون العلامات

(مثال ١)

$$\left. \begin{aligned} & \text{سه}^2 + ٤ \text{سه} + ٩ \text{ع}^2 - ٢ \text{سه} \times ٢ \text{سه} \times ٢ \text{ع} \\ & \text{سه}^2 + ٤ \text{سه} + ٩ \text{ع}^2 - ٢ \text{سه} \times ٢ \text{ع} \times ٢ \text{سه} \\ & \text{سه}^2 + ٤ \text{سه} + ٩ \text{ع}^2 - ٤ \text{سه} \text{سه} - ٦ \text{سه} \text{ع} \end{aligned} \right\} = (\text{سه}^2 - ٢ \text{سه} - ٢ \text{ع}^2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{سه}^2 + ٤ \text{سه} + ٩ \text{ع}^2 - ٤ \text{سه} \text{سه} - ٦ \text{سه} \text{ع} \\ & \text{سه}^2 + ٤ \text{سه} + ٩ \text{ع}^2 - ٤ \text{سه} \text{سه} - ٦ \text{سه} \text{ع} \end{aligned} \right\} =$$

(مثال ٢)

$$\left. \begin{aligned} & ١ + ٤ \text{سه}^2 + ٩ \text{ع}^2 + ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه} \\ & ١ + ٤ \text{سه}^2 + ٩ \text{ع}^2 - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه} \\ & ١ + ٤ \text{سه}^2 + ٩ \text{ع}^2 - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه} \end{aligned} \right\} = (١ + ٢ \text{سه} - ٣ \text{سه}^2)$$

$$= ١ + ٤ \text{سه}^2 + ٩ \text{ع}^2 - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه} - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه} - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه}$$

$$= ١ + ٤ \text{سه}^2 + ٩ \text{ع}^2 - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه} - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه} - ٢ \times ١ \times ٢ \text{سه}$$

وذلك بعد اختصار الحدود وترتيبها حسب القوى الصاعدة للعرف سه

## (تمارين ١٥ ب)

اكتب مربع كل من المصادر الآتية

(١٩) ٣ ط - ٢ ٥ + ٤ ٧	(١٠) سه - ١ ٥	(١) ١ + ٣ ٥
(٢٠) ١ - سه - ٢ ٥	(١١) سه + ٢ ٥	(٢) ٣ - ١ ٥
(٢١) ٢ سه + ٣ سه - ١	(١٢) سه - ١	(٣) سه - ٥ سه
(٢٢) سه - ١ + سه	(١٣) ١ - ٥ - سه	(٤) سه + ٢ سه
(٢٣) سه + ٢ سه + ١ - ٥	(١٤) سه + ١ - ٥	(٥) سه - سه
(٢٤) ٢ - ٥ - ط - سه	(١٥) سه + ٢ + ١ ٥	(٦) سه + ٥ سه
(٢٥) ١ ٢ - ٢ ٥ + ٤ ٥	(١٦) ٢ ٥ + ٣ ٥ - ٤ ٥	(٧) سه - ٢ سه
(٢٦) ٢ ٥ - ٣ ٥ - ٤ ٥	(١٧) سه - سه - ٢ ٥	(٨) ٥ - ١ ٥
(٢٧) ٢ ٥ - سه - سه	(١٨) سه + سه + سه	(٩) ط - سه

بند ١١٥ - لو أجريننا عملية الضرب فيما يأتى لوجدنا أن

$$(١ + ١) (١ + ١) (١ + ١) = (١ + ١)$$

$$١ + ١ + ١ + ١ + ١ + ١ =$$

$$١ + ١ + ١ + ١ + ١ + ١ = (١ - ١) \quad \text{وأن}$$

ومراعاة كيفية تكوين الحدود فى هاتين النتيجةين يمكننا أن نعرف مكعب أى مقدار جبرى ذى حدين

$$\text{مثال (١): } (٢ \text{ سر} + \text{سر}) = (٢ \text{ سر}) + (٢ \text{ سر}) + (٢ \text{ سر}) = ٦ \text{ سر} + ٦ \text{ سر} + ٦ \text{ سر} = ١٨ \text{ سر}$$

$$٨ \text{ سر} + ١٢ \text{ سر} + ٦ \text{ سر} = ٢٦ \text{ سر}$$

$$\text{مثال (٢): } (٣ \text{ سر} - ٢ \text{ سر}) = (٣ \text{ سر}) - (٢ \text{ سر}) = ١ \text{ سر}$$

$$٢٧ \text{ سر} - ٥٤ \text{ سر} + ٣٦ \text{ سر} = ٩ \text{ سر}$$

(تمارين ١٥ >)

أكتب مكعب كل من المقادير الآتية

$(١) \text{ سر} + ١$	$(٥) \text{ سر} - ٥$	$(٩) \text{ سر} + ٤$	$(١٣) ١ - \frac{٢}{٣}$
$(٢) \text{ سر} - ١$	$(٦) ١ + ٦$	$(١٠) \text{ سر} - ٤$	$(١٤) \frac{١}{٣} + ٢$
$(٣) \text{ سر} - ٢$	$(٧) ١٢ - ٣$	$(١١) ٢ - ٣$	$(١٥) \frac{٢}{٣} - \text{سر}$
$(٤) \text{ سر} + ٢$	$(٨) ١٥ - ٥$	$(١٢) \text{ سر} - ٤$	$(١٦) \frac{١}{٣} + \text{سر}$

## الباب السادس عشر - استخراج الجذور

بند ١١٦ - تعريف: جذر أى مقدار معلوم هو الكمية التى إذا رفعت إلى قوة معينة ينتج ذلك المقدار  
فعملية استخراج الجذر إذن عكس عملية الرفع إلى القوة

بند ١١٧ - على مقتضى قانون العلامات نرى أن

(١) الجذر الزوجى لأى مقدار موجب يمكن اعتباره إما موجبا أو سالبا

(٢) لا يمكن أن يكون للمقدار السالب جذر دليله زوجى

(٣) علامة كل جذر دليله فردى لمقدار ما هى علامة المقدار نفسه

(ملاحظة) يجب أن يلاحظ أن لكل مقدار موجب جذرين تربيعيين متساويين فى المقدار  
و مختلفين فى العلامة

$$\text{مثال (١): } \sqrt{٩ \text{ سر} + ١} = ٣ \text{ سر} + ١$$

وستقتصر فى هذا الباب على البحث فى الجذور الموجبة

$$\sqrt{٩ \text{ سر} + ١} = ٣ \text{ سر} + ١ \text{ لأن } (٣ \text{ سر} + ١)^2 = ٩ \text{ سر} + ١$$

$$\sqrt{٩ \text{ سر} - ١} = ٣ \text{ سر} - ١ \text{ لأن } (٣ \text{ سر} - ١)^2 = ٩ \text{ سر} - ١$$

$$\sqrt{٩ \text{ سر} + ١} = ٣ \text{ سر} + ١ \text{ لأن } (٣ \text{ سر} + ١)^2 = ٩ \text{ سر} + ١$$

$$\sqrt{٩ \text{ سر} - ١} = ٣ \text{ سر} - ١ \text{ لأن } (٣ \text{ سر} - ١)^2 = ٩ \text{ سر} - ١$$

بند ١١٨ - من الأمثلة المتقدمة نستخلص قاعدة عمومية لاستخراج أى جذر لأى مقدار بسيط وهي

قاعدة (١) يستخرج جذر المعامل بالطرق المعروفة فى علم الحساب وتوضع أمام الناتج العلامة اللاتقة حسباً يقتضيه قانون العلامات

قاعدة (٢) يقسم أس كل عامل فى المقدار على دليل الجذر

$$\sqrt[2]{-٦٤} = -٤ \text{ أمثلة}$$

$$\sqrt[4]{١٦} = ٢$$

$$\sqrt[5]{\frac{٨١}{٢٥}} = \frac{٣}{٥}$$

(تمارين ١١٦)

ما الجذر التربيعى لكل من المقادير الآتية

$\sqrt[3]{\frac{٢٢٤}{١٢٩}}$ (١٣)	$\sqrt[١٨]{٦٤}$ (٩)	$\sqrt[٨]{٨١}$ (٥)	$\sqrt[١٠]{٤}$ (١٠)
$\sqrt[١٨]{\frac{٨١}{١٢٩}}$ (١٤)	$\sqrt[٣٦]{\frac{٢٦}{٣١}}$ (١٠)	$\sqrt[٨]{١٠٠}$ (٦)	$\sqrt[٩]{٩}$ (٢)
$\sqrt[٢٥٦]{\frac{٢٥٦}{١٤٨٩}}$ (١٥)	$\sqrt[١٦]{\frac{١٦}{١٦}}$ (١١)	$\sqrt[٢١]{٢١}$ (٧)	$\sqrt[٢٥]{٢٥}$ (٣)
$\sqrt[٢٠٠]{\frac{٢٠٠}{١٨}}$ (١٦)	$\sqrt[٢٥]{\frac{٢٨٩}{٢٥}}$ (١٢)	$\sqrt[٨]{٨}$ (٨)	$\sqrt[١٦]{١٦}$ (٤)

ما الجذر التكعيبي لكل من المقادير الآتية

$\sqrt[١٢٥]{\frac{١٢٥}{٢١٦}}$ (٢٣)	$\sqrt[١٢٥]{\frac{١٢٥}{١٢٥}}$ (٢١)	$\sqrt[١٢]{\frac{١٢}{١٢}}$ (١٩)	$\sqrt[٢٧]{٢٧}$ (١٧)
$\sqrt[٢٧]{\frac{٢٧}{٦٤}}$ (٢٤)	$\sqrt[١٥]{\frac{٨}{٧٢٩}}$ (٢٢)	$\sqrt[١٢]{\frac{١٢}{١٢}}$ (٢٠)	$\sqrt[١٢]{٨}$ (١٨)

ما قيمة كل من المقادير الآتية

$\sqrt[١٢٨]{\frac{١٢٨}{٥٩}}$ (٣١)	$\sqrt[١٨١]{\frac{١٨١}{٧٢٩}}$ (٢٨)	$\sqrt[١٢]{\frac{٨٢}{٨٢}}$ (٢٥)
$\sqrt[٣٠١]{\frac{٣٠١}{١٠٠}}$ (٣٢)	$\sqrt[٨٢]{\frac{٨٢}{٣٥٦}}$ (٢٩)	$\sqrt[١٤]{\frac{١٤}{٢١}}$ (٢٦)
$\sqrt[١٨١]{\frac{١٨١}{٣٦}}$ (٣٣)	$\sqrt[١٥]{\frac{١٥}{٣٥}}$ (٣٠)	$\sqrt[٣٣]{\frac{٣٣}{١٠}}$ (٢٧)

بند ١١٨ - (١) قد علمنا مما جاء ببند (١١٢) أنه يمكن كتابة مربع أى مقدار ذى حدين بدون إجراء عملية الضرب

مثلا  $(٢ ص + ٣ ص)^٢ = (٢ ص)^٢ + ٢ \times ٢ \times ٣ ص + (٣ ص)^٢$  وبالعكس قد يكفى في بعض الأحيان لاستخراج الجذر التربيعي لمقدار جبرى مجرد النظر إلى حدوده

(مثال ١) ما الجذر التربيعي للمقدار  $٢٥ ص^٢ - ٤٠ ص ص + ١٦ ص^٢$  هذا المقدار

$$= (٥ ص)^٢ - ٢ \times ٢٠ ص ص + (٤ ص)^٢$$

$$= (٥ ص)^٢ - ٢ \times (٥ ص) (٤ ص) + (٤ ص)^٢$$

$$= (٥ ص - ٤ ص)^٢$$

فالجذر المراد استخراجه  $٥ ص - ٤ ص$

(مثال ٢) ما الجذر التربيعي للمقدار  $\frac{١٢٢}{٣} + ٤ + \frac{١٦٤}{٩}$

$$= \left(\frac{١٨}{٣}\right)^٢ + ٢ \left(\frac{١٨}{٣}\right) \left(٢\right) + \left(\frac{١٨}{٣}\right)^٢$$

$$= (٢) + (٢) \left(\frac{١٨}{٣}\right) + \left(\frac{١٨}{٣}\right)^٢$$

$$= \left(٢ + \frac{١٨}{٣}\right)^٢$$

فالجذر التربيعي المطلوب  $٢ + \frac{١٨}{٣}$

(مثال ٣) ما الجذر التربيعي للمقدار  $٢٤ ص + ٢٤ ص + ٢٤ ص + ٢٤ ص - ٢٤ ص - ٢٤ ص$

ترتب الحدود حسب القوى النازلة للحرف  $ص$  مع مراعاة ترتيب باقى الحروف حسب مراتبها فى المعجم الاول فالاول

$$= ٢٤ ص + ٢٤ ص - ٢٤ ص + ٢٤ ص - ٢٤ ص - ٢٤ ص$$

$$= ٢٤ ص + ٢٤ ص - ٢٤ ص - ٢٤ ص + ٢٤ ص - ٢٤ ص$$

$$= (٢٤ ص - ٢٤ ص) + (٢٤ ص - ٢٤ ص) + ٢٤ ص + ٢٤ ص$$

$$= (٢٤ ص - ٢٤ ص) + (٢٤ ص - ٢٤ ص) + ٢٤ ص + ٢٤ ص$$

فالجذر التربيعي المطلوب  $٢٤ ص + ٢٤ ص$

ويمكننا أن نتبع الطريقة الآتية فى الحل

$$= (٢٤ ص)^٢ + ٢٤ ص + ٢٤ ص - ٢٤ ص \times (٢٤ ص) - ٢٤ ص \times (٢٤ ص)$$

$$= ٢٤ ص \times ٢٤ ص -$$

وواضح أن هذا المقدار مربع  $٢٤ ص + ٢٤ ص$  [بند ١١٤]

بند ١١٩ - إذا لم يكن استخراج الجذر التربيعي ميسورا بمجرد النظر تتبع القاعدة الآتية وهى قاعدة تنطبق على كل الأحوال ولكنها تستير على المتعلم أن يمتهد فى إيجاد الجذر بطريقة النظر متى أمكنه ذلك فانه خير من استخراجيه بطريقة القواعد



بما أن مربع  $(١ + ب)$  هو  $١ + ٢ب + ب^٢$  يلزمنا أن نبحث عن طريقة تمكننا من إيجاد كل من  $١$  و  $٢ب$  اللذين هما حدا الجذر متى علم المقدار  $١ + ٢ب + ب^٢$  ولذا نقول إن  $١ + ٢ب + ب^٢ = ١ + ٢ب + ب^٢$  وبذلك نرى أن المقدار مكون من إضافة المقدارين الآتين أحدهما إلى الآخر

(أولاً) مربع الحد الأول من الجذر

(ثانياً) حاصل ضرب الحد الثاني من الجذر في مجموع كل من الحد الثاني وضعف الحد الأول منه وإذا عكسنا الطريقة المتقدمة وصلنا إلى كيفية إيجاد الجذر وهي

$$\begin{array}{r} ١ + ٢ب + ب^٢ \\ \underline{١ + ١ب} \phantom{+ ب^٢} \\ ١ب + ٢ب + ب^٢ \\ \underline{١ب + ١ب} \phantom{+ ب^٢} \\ ٠ + ٠ب + ب^٢ \\ \underline{٠ + ٠ب} \phantom{+ ب^٢} \\ ٠ + ٠ب + ب^٢ \end{array}$$

وشرح ذلك أن

- (١) ترتب الحدود على حسب قوى أحد الحروف وهو ١ مثلا
- (٢) يؤخذ الجذر التربيعي للحد  $١$  ويكون الناتج الحد الأول من الجذر المطلوب ثم يطرح مربع ذلك الجذر من المقدار الكلي المعلوم
- (٣) يقسم أول حد من الباقي على ضعف أول حد من الجذر فينتج الحد الثاني من الجذر وهو ب
- (٤) يضاف الحد الثاني من الجذر إلى ضعف الحد الأول منه فيتكون منهما المقسوم عليه الكلي وهو  $١ + ٢ب$

(مثال ١) لاستخراج الجذر التربيعي للمقدار  $٩س^٢ - ٤٢س + ٤٩$  سـ يمرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٩س^٢ - ٤٢س + ٤٩ \\ \underline{٩س^٢ - ٤٢س + ٤٩} \\ ٠س^٢ - ٠س + ٠ \end{array}$$

(شرح العملية) الجذر التربيعي للمقدار  $٩س^٢$  هو  $٣س$  وهو أول حد من الجذر وتضعف هذا الحد ينتج  $٦س$  وهو أول حد من المقسوم عليه فنقسم  $٤٢س$  سـ وهو أول حد من الباقي على  $٦س$  فينتج  $٧س$  وهو الحد الثاني في الجذر ويوضع أيضا في المقسوم عليه ثم نضرب المقسوم عليه بأجمعه في  $٧س$  ونطرح حاصل الضرب من الباقي الأول فلا نجد باقيا وعلى ذلك يكون الناتج  $٣س - ٧س$  الجذر المطلوب

تستعمل هذه القاعدة في إيجاد الجذر التربيعي لأي مقدار كثير الحدود فلستخرج الجذرين الأولين بالطريقة المتقدمة ثم نزل باقي الطرح الثاني ونضعف حدى الجذر المعلومين لتكوين الجزء الأول من المقسوم عليه الجديد ثم نقسم أول حد من الباقي على أول حد من هذا المقسوم عليه فيكون الخارج

هو الحد الثالث من الجذر فنضمه إلى حدود الجذر المستخرجة ونضعه أيضا في المقسوم عليه ونضرب هذا الأخير بأكمله في الحد الثالث من الجذر ونطرح الحاصل من الباقي المعلوم فان كان باقي الطرح صفرا فـ وجد يكون الجذر المطلوب وإلا نكرر العمل حتى نصل إلى نهاية

(مثال ٢) لاستخراج الجذر التربيعي للعدد ٢٥ سر ٢ - سر ١٢ - سر ٢ سر ١٦ + سر ٤ سر ٤ + سر ٢٤ سر ١

نرتب المقدار حسب القوى النازلة للحرف سر هكذا

$$\begin{array}{r} ١٦ سر - ٢٤ سر + ١ سر ٢٥ سر ٢ - ١٢ سر ٢ سر ١٢ سر ٤ + ٤ سر ٢ سر ١٦ سر \end{array}$$

$$١ سر ٣ - ٢ سر ٨$$

$$\begin{array}{r} ٢٤ سر + ١ سر ٢٥ سر ٢ - \\ ٢٤ سر + ١ سر ٩ سر ٢ - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ١٦ سر ٢ - ١٢ سر ٢ سر ١٢ سر ٤ + ٤ سر ٢ سر ١٦ سر \\ ١٦ سر ٢ - ١٢ سر ٢ سر ١٢ سر ٤ + ٤ سر ٢ سر ١٦ سر \end{array}$$

(شرح العملية) بعد الحصول على حدين في الجذر وهما سر ٤ سر ٦ - سر ٣ سر ١ نجد أن الباقي سر ١٦ سر ٢ - سر ١٢ سر ٢ سر ١٢ سر ٤ + سر ٤ سر ٢ سر ١٦ سر

فنضاعف حتى الجذر المعلومين فيحدث سر ٨ سر ٦ - سر ١ ونجعل هذا الناتج أول جزء من المقسوم عليه الجديد ثم بقسمة سر ١٦ سر ٢ وهو الحد الأول من الباقي على سر ٨ وهو الحد الأول من المقسوم عليه ينتج سر ٢ وهذا يوضع في كل من ناتج الجذر والمقسوم عليه ثم نضرب المقسوم عليه بأكمله في سر ٢ ونطرح الحاصل من الباقي المعلوم وبذا تنتهي العملية لعدم وجود باقي

(تمارين ١٦ ب)

استخرج الجذر التربيعي لكل من المقادير الآتية

$$\begin{array}{l} (١) \quad ٤ سر + ٤ سر سر ٤ سر \\ (٢) \quad ٩ سر + ١٢ سر + ٤ سر \\ (٣) \quad ١٠ سر سر ٢٥ سر \\ (٤) \quad ٤ سر ٢ - ١٢ سر سر ٩ سر \\ (٥) \quad ٨١ سر + ١٨ سر سر ٤ سر + ٢ سر \\ (٦) \quad ٢٥ سر - ٣٠ سر سر ٩ سر + ٢ سر \\ (٧) \quad ٢ سر ٢ سر ٢ سر + ٢ سر \\ (٨) \quad ١ سر ٢ سر - ١ سر ٢ سر + ٢ سر \\ (٩) \quad ١ سر ٢ سر - ١ سر ٢ سر + ١ سر ٢ سر \\ (١٠) \quad ٤ سر ٢ - ١٢ سر سر ٢٩ سر - ٣٠ سر + ٢٥ سر \\ (١١) \quad ٩ سر - ١٢ سر سر ٢ سر + ٤ سر + ١ سر \\ (١٢) \quad ٤ سر - ١٢ سر سر ٦ سر - ٤ سر + ١ سر \\ (١٣) \quad ٤ سر + ١٤ سر - ١٧ سر سر ٤ سر + ١٤ سر \\ (١٤) \quad ١ سر - ١٠ سر + ٢٧ سر سر ١٠ سر + ٢ سر \\ (١٥) \quad ٤ سر + ٩ سر سر ٢٥ سر + ١٢ سر سر ٣٠ سر - ٢٠ سر ع \end{array}$$

$$(١٦) \quad ١٦ \text{ ص} + ١٦ \text{ ص} - ٤ \text{ ص} - ٤ \text{ ص} + ١ \text{ ص}$$

$$(١٧) \quad ٢٢ \text{ ص} - ٢٢ \text{ ص} + ٣٤ \text{ ص} + ١٢١ \text{ ص} - ٣٧٤ \text{ ص} + ٢٨٩ \text{ ص}$$

$$(١٨) \quad ٢٥ \text{ ص} - ١٣٠ \text{ ص} + ٤٩ \text{ ص} - ١٢٤ \text{ ص} + ١١٦ \text{ ص}$$

$$(١٩) \quad ٤ \text{ ص} + ٤ \text{ ص} - ١٢ \text{ ص} + ٢ \text{ ص} + ٢ \text{ ص} - ٦ \text{ ص} + ٩ \text{ ص}$$

$$(٢٠) \quad ١٦ \text{ ص} - ٤ \text{ ص} + ١٦ \text{ ص} + ١٦ \text{ ص} + ١٦ \text{ ص} - ١٢ \text{ ص} + ١٢ \text{ ص}$$

$$(٢١) \quad ٢٦ \text{ ص} - ٩ \text{ ص} + ٩ \text{ ص} - ١٢ \text{ ص} + ١٢ \text{ ص} + ١٢ \text{ ص}$$

$$(٢٢) \quad ٤ \text{ ص} + ٩ \text{ ص} + ١٣ \text{ ص} - ٦ \text{ ص} - ٤ \text{ ص} - ٢ \text{ ص}$$

$$(٢٣) \quad ٦٧ \text{ ص} + ٤٩ \text{ ص} + ٩ \text{ ص} - ٧٠ \text{ ص} - ٣٠ \text{ ص}$$

$$(٢٤) \quad ١ - ٤ \text{ ص} + ١٠ \text{ ص} - ٢٠ \text{ ص} + ٢٥ \text{ ص} - ٢٤ \text{ ص} + ١٦ \text{ ص}$$

$$(٢٥) \quad ١٦ \text{ ص} + ٤ \text{ ص} + ١٦ \text{ ص} + ١٦ \text{ ص} - ٩ \text{ ص} - ١٢ \text{ ص} - ١٤ \text{ ص}$$

بند ١٢٠ - إذا اشتمل المقصد المراد استخراج جذره على حدود كسرية تتبع الطريقة العامة السابقة ويعمل في الكسور على حسب ما جاء خاصا بها في الباب الثاني عشر

بند ١٢١ - وهناك أمر مهم يجب الالتفات إليه حينما يشتمل المقدار على قوى حرف مخصوص مع قوى مقلوبة لتلك الحرف فتلا المقدار

$$٢ \text{ ص} + \frac{١}{٣} + ٤ + ٢ \text{ ص} + \frac{٥}{٣} + ٧ \text{ ص} + \frac{٨}{٣}$$

إن رتب حسب القوى النازلة للحرف ص يجب أن يكتب هكذا

$$٢ \text{ ص} + ٧ \text{ ص} + ٢ \text{ ص} + ٤ + \frac{٥}{٣} + \frac{١}{٣} + \frac{٨}{٣}$$

مع مراعاة وضع الكمية العددية ٤ بين ص ٦

وسينظر في الباب الثلاثين سبب ترتيب القوى على هذه الكيفية

(مثال) ما الجذر التربيعي للمقدار

$$٢٤ + \frac{١٦}{٣} - \frac{٨}{٣} + \frac{٢٢}{٣} - \frac{٢٢}{٣}$$

نرتب المقدار على حسب القوى النازلة للحرف ص

$$\frac{١٦}{٣} - \frac{٢٢}{٣} + ٢٤ - \frac{٨}{٣} + \frac{٢}{٣} \quad \left| \quad \frac{٤}{٣} - ٤ + \frac{٨}{٣} \right.$$

$$٤ - \frac{٨}{٣}$$

$$\begin{array}{r} - \frac{٢٢}{٣} + \frac{٢٢}{٣} \\ - \frac{١٦}{٣} + \frac{١٦}{٣} \end{array}$$

$$\frac{٨}{٣} + ٨ - \frac{٨}{٣} \quad \left| \quad \frac{٨}{٣} + \frac{٨}{٣} - ٨ \right.$$

فى هذه العملية ينتج الحد الثانى من الجذر وهو - ٤ من قسمة  $\frac{٣٢}{صه}$  على  $\frac{٨}{صه}$

وينتج الحد الثالث  $\frac{صه}{صه}$  من قسمة ٨ على  $\frac{صه}{صه}$  هكذا

$$\frac{صه}{صه} = \frac{صه}{صه} \times ٨ = \frac{صه}{صه} \div ٨$$

(تمارين ١٦ >)

استخرج الجذر التربيعى لكل من المقادير الآتية

- |  |   |
|--|---|
| (١٠) $\frac{١}{٤} + صه - ٢ صه + صه$                                    | (١) $٩ + صه - \frac{٢}{٤} صه$                     |
| (١١) $١٥ - ٤ + \frac{٢٥}{٩} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٩}$ | (٢) $\frac{٢}{صه} + \frac{صه}{صه} - ٤$            |
| (١٢) $\frac{٢٩}{٢} + \frac{١}{٩} + صه - ٢ صه - \frac{١}{صه}$           | (٣) $\frac{٢}{صه} + \frac{صه}{صه} + \frac{٢}{صه}$ |
| (١٣) $١ - \frac{١}{صه} + \frac{٢}{صه} + \frac{٩}{٤}$                   | (٤) $٢٥ + \frac{١٠}{صه} + \frac{٢}{صه}$           |
| (١٤) $\frac{صه}{٢} - \frac{٢}{صه} + ٢ صه - \frac{٤}{صه}$               | (٥) $٤ + \frac{صه}{صه} - \frac{٢}{صه}$            |
| (١٥) $\frac{١}{٩} + \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{صه} + \frac{٤}{٤}$          | (٦) $\frac{١}{صه} + \frac{١٢}{صه} - \frac{٢}{صه}$ |
| (١٦) $\frac{صه}{١٥} - \frac{١٠}{٢٥} + \frac{١}{صه} - \frac{٢}{صه}$     | (٧) $٤ + \frac{صه}{صه} + \frac{٢}{صه}$            |
| (١٧) $٢٨ + ٥ صه + \frac{١}{صه} + \frac{١}{صه}$                         | (٨) $\frac{٢٥}{صه} + ٢ - \frac{٢}{صه}$            |
| (١٨) $\frac{٢٤}{صه} + ٩٦ + ٢ صه + صه$                                  | (٩) $١ + ١ - \frac{٢}{صه} + \frac{٤}{صه}$         |

بند ۱۲۲ — استخراج الجذر التكعيبي لأي مقدار مركب

بما أن مكعب  $(a + b)$  هو  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  فيجب أن نجث عن  
طريقة تمكننا من استخراج الحدين  $3a^2b + 3ab^2$  إذا علم المقدار  $a^3 + b^3$

نرى أن أول حد في الجذر وهو ١ هو الجذر التكعيبي للوحدة <sup>٢</sup> التي هي أول حد في المقدار المعلوم  
فتب حدود المقدار حسب قوى أحد الحروف وليكن ١ مثلاً ونأخذ الجذر التكعيبي للحد <sup>٣</sup>  
وهو أول حد في المقدار فيكون الناتج وهو ١ أول حد في الجذر المراد استخراجها ثم نطرح مكعب ١  
من المقدار بتمامه ويكون الباقي

$$u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$$

منه نرى أنه يمكن استخراج الحد الثاني للجذر وهو  $b$  بقسمة هذا الباقي على  $13 + 13 + b$  وبالنظر في هذا المقسوم عليه نجد أنه مركب من

(١) ثلاثة أمثال مربع ١ التي هي الحد الأول من ناتج الجذر

(٢) ثلاثة أمثال حاصل ضرب الحد الأول ١ في الحد الثاني ٣

(۲) مربع ب

فيمكننا ترتيب العمل على الوجه الآتى

$$\underline{u + 1} \mid u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{10} + u^{11} + u^{12} + u^{13} + u^{14} + u^{15} + u^{16} + u^{17} + u^{18} + u^{19} + u^{20} + u^{21} + u^{22} + u^{23} + u^{24} + u^{25} + u^{26} + u^{27} + u^{28} + u^{29} + u^{30} + u^{31} + u^{32} + u^{33} + u^{34} + u^{35} + u^{36} + u^{37} + u^{38} + u^{39} + u^{40} + u^{41} + u^{42} + u^{43} + u^{44} + u^{45} + u^{46} + u^{47} + u^{48} + u^{49} + u^{50} + u^{51} + u^{52} + u^{53} + u^{54} + u^{55} + u^{56} + u^{57} + u^{58} + u^{59} + u^{60} + u^{61} + u^{62} + u^{63} + u^{64} + u^{65} + u^{66} + u^{67} + u^{68} + u^{69} + u^{70} + u^{71} + u^{72} + u^{73} + u^{74} + u^{75} + u^{76} + u^{77} + u^{78} + u^{79} + u^{80} + u^{81} + u^{82} + u^{83} + u^{84} + u^{85} + u^{86} + u^{87} + u^{88} + u^{89} + u^{90} + u^{91} + u^{92} + u^{93} + u^{94} + u^{95} + u^{96} + u^{97} + u^{98} + u^{99}$$

$$\frac{u + \frac{v}{u}}{u + \frac{v}{u} + \frac{v}{u}} = \frac{(1)}{v(u)}$$

(مثال ۱) ما الجذر التكعيبي للعدد ٨ من الدرجة ٣ - ٢٦ من الدرجة ٢ + ٥٤ من الدرجة ١ - ٢٧ من الدرجة ٠

٣  
٢  
١  
٠

٨ من الدرجة ٣ - ٢٦ من الدرجة ٢ + ٥٤ من الدرجة ١ - ٢٧ من الدرجة ٠

$$\frac{\sqrt{12} = (\sqrt{2})^2}{\sqrt{9} + \sqrt{18} - \sqrt{12}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

(مثال ٢) استخراج الجذر التكعيبي لـ  $٢٧ + ١٠٨س + ٩٠س^٢ - ٨٠س^٣ - ٦٠س^٤ + ٤٨س^٥ - ٨س^٦$

$$٢٧ + ١٠٨س + ٩٠س^٢ - ٨٠س^٣ - ٦٠س^٤ + ٤٨س^٥ - ٨س^٦ = (٣س - ٢س^٢)^٣$$

$$٢٧ = (٣س)^٣ \times ٣ = ٣س^٣ \times ٣س^٣ = ٣س^٦$$

$$\frac{١٦س + ٣٧س^٢ + ٣٧س^٣ + ١٦س^٤}{٣س^٣} = (٤س - ٢س^٢)^٢$$

$$\frac{١٦س + ٣٧س^٢ + ٣٧س^٣ + ١٦س^٤}{٣س^٣} = ١٦س + ٣٧س^٢ + ٣٧س^٣ + ١٦س^٤$$

$$٣س^٣ \times (٤س - ٢س^٢)^٢ = ٣س^٣ \times (١٦س + ٣٧س^٢ + ٣٧س^٣ + ١٦س^٤)$$

$$= (١٦س^٤ - ٢٤س^٣ + ٣٧س^٢ - ١٨س + ٣٧س^٠) \times ٣س^٣$$

$$= ٤٨س^٧ - ٧٢س^٦ + ١١١س^٥ - ٥٤س^٤ + ١٠٨س^٣ + ١٠٨س^٢ + ١٠٨س + ٣٦$$

$$= ٤٨س^٧ - ٧٢س^٦ + ١١١س^٥ - ٥٤س^٤ + ١٠٨س^٣ + ١٠٨س^٢ + ١٠٨س + ٣٦$$

(شرح العملية) بعد ان نستخرج حدين في الجذر وهما  $٣س + ٤س$  نجد باقي وهو

$$٥٤س^٤ - ١٤٤س^٣ - ٩٠س^٢ + ٤٨س - ٨س^٠$$

نأخذ ثلاثة أمثال مربع الجذر الناتج فيصحت  $٢٧ + ١٠٨س + ٩٠س^٢ - ٨٠س^٣ - ٦٠س^٤ + ٤٨س^٥$  وهذا أول جزء من المقسوم عليه الجديد

ثم قسم  $٥٤س^٤$  وهو أول حد من الباقي على  $٢٧$  وهو أول حد من المقسوم عليه فخرج القسمة  $٢س^٢$  يكون الحد الثالث في الجذر

ولتكون المقسوم عليه نضم إلى الجزء المتبقى حاصل ضرب ثلاثة أمثال  $(٣س + ٤س - ٢س^٢)$  وكذا مربع  $(٢س^٢)$  ثم فحرب المقسوم عليه بأكثر في  $(٢س - ٢س^٢)$  وبعد ذلك نجري عملية الطرح فيجد أن العملية تنتهي وبهذه يكون الناتج الجذر المطلوب

(تمارين ١٦ د)

ما الجذر التكعيبي لكل من المقادير الآتية

$$(١) ١ + ١٣ + ١٢ + ١$$

$$(٢) ٨ + ١٢ + ٦ + ٢$$

$$(٣) ١٢ - ١٣ + ١٣ + ١٣ - ١٣$$

$$(٤) ١ - ٢٦ + ٢١٢ - ٢٢٨$$

$$(٥) ٢٢٧ - ١١٠٨ + ١٤٤ - ١٦٤$$

$$(٦) ١ + ٣ + ٦ + ٧ + ٦ + ٣ + ١$$

$$(٧) ١ - ٦ + ٢١ - ٢ - ٤٤ + ٦٣ - ٥٤ - ٢٧$$

$$(٨) ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧$$

$$(٩) ١ + ١٩ - ١٣٣ + ١٦٣ - ١٦٦ + ١٣٦ - ١٨$$

$$(١٠) ١ + ٣ + ٦ + ٧ + ٦ + ٣ + ١$$

$$(١١) ٢٧ - ١٢ + ٣٠ - ٣٥ + ٤٥ + ٢٧ - ٢٧$$

$$(١٢) ٢٧ - ٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧ + ١٢٧ - ١٢٧$$

$$(١٣) ١ - ٣ + ٦ + ١٧ + ١٨ - ٢٧ - ٢٧$$

$$(١٤) ٢٤ - ٩٦ + ٩٦ - ٩٦ + ٩٦ - ٩٦ + ٩٦ - ٩٦ + ٩٦ - ٩٦ + ٩٦ - ٩٦$$

$$(١٥) ١٠٨ - ٢٧ - ٢٧ + ١٧١ + ٢٤٢ + ٢١٦$$

١٢٢ - نأق الآن ببعض أمثلة على كيفية استخراج الجذر التكعيبي للمقادير التي تشمل على

حلول كمرية

$$(مثال) ما الجذر التكعيبي للقدار ٥٤ - ٢٧ + ٢٧ - ٢٧$$

نكتب المقدار حسب القوى العاصدة للحرف م مكننا

$$\frac{٢٧}{٢٧} - \frac{٢٧}{٢٧} + \frac{٢٧}{٢٧} - \frac{٢٧}{٢٧}$$

$$\begin{aligned} \frac{١٢}{٢٧} &= \left( \frac{٢}{٢٧} \right)^3 \\ \frac{١٨}{٢٧} - \frac{١٢}{٢٧} &= (-٣) \times \frac{٢}{٢٧} \times ٣ \\ \frac{٢٧}{٢٧} + \frac{١٨}{٢٧} - \frac{١٢}{٢٧} &= (-٣) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &٢٧ - ٥٤ + \frac{٢٧}{٢٧} - \\ &٢٧ - ٥٤ + \frac{٢٧}{٢٧} - \end{aligned} \right.$$

(تمارين ١٦ هـ)

استخرج الجذر التكعيبي لكل من المقادير الآتية

$$(١) \quad ١ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٨}$$

$$(٢) \quad ٨ + \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧}$$

$$(٣) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(٤) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(٥) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(٦) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(٧) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(٨) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(٩) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(١٠) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(١١) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

$$(١٢) \quad ٨ - \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} - \frac{٣}{٧}$$

بند ١٢٤ - القواعد المستعملة في استخراج الجذر التربيعي والجذر التكعيبي في الحساب مبينة على الطرق الجبرية التي أتينا عليها في هذا الباب وإيضاحا لذلك نورد المثال الحسابي التالي

(مثال) ليكن المطلوب استخراج الجذر التكعيبي للعدد ٦١٤١٢٥

نقول بما أن ٦١٤١٢٥ أصغر من ٧٢٩٠٠٠ وأكبر من ٥١٢٠٠٠ أى أنه أصغر من (٩٠) وأكبر من (٨٠) يكون جذره التكعيبي أكبر من ٨٠ وأصغر من ٩٠ أى أنه عدد مركب من رقمين

$$٨٥ = ٨٠ + ٥$$

$$٥١٢٠٠٠$$

$$١٩٢٠٠ = ٨٠ \times ٣ = ٢٣$$

$$١٢٠٠ = ٥ \times ٨٠ \times ٣ = ٥ \times ١ \times ٣$$

$$٢٥ = ٥ \times ٥ = ٥$$

$$٢٠٤٢٥$$

$$١٠٢١٢٥$$

وقد تختلف العملية الجبرية عن العملية الحسابية من جملة وجوه منها إهمال الأصفار غالباً في العملية الحسابية



## الباب السابع عشر - التحليل إلى العوامل

بند ١٢٥ - تعريف : إذا ساوى مقدار جبرى حاصل ضرب كيتين أو أكثر فكل من هذه الكيات يسمى عاملا للمقدار الأصلي وطريقة البحث عن عوامل أى مقدار جبرى تسمى طريقة تحليل المقدار إلى عوامله

وستأتى فى هذا الباب على أهم القواعد التى يمكن بها تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها

بند ١٢٦ - إذا قبل كل حد من الحدود المكونة لمقدار جبرى القسمة على عامل مشترك بينها أمكن اختصار المقدار بقسمة كل حد على هذا العامل المشترك وحصر خارج القسمة بين قوسين أما العامل المشترك فيوضع خارج القوس الأيمن باعتبار أنه معامل للكية المحصورة داخل القوسين

(مثال ١) حدا المقدار  $١٣ - ١٦$  ب يقبلان القسمة على عامل مشترك وهو  $١٣$

$$\therefore ١٣ - ١٦ = ١٣(١ - ٢)$$

(مثال ٢)  $١٥$  ب  $١٥$  ب  $١٥$  ب  $٢٠$  ب  $٥$  ب  $١٣$  ب  $٤$  ب

(تمارين ١٧)

حل كل من المقادير الآتية إلى عوامله

(١٤) $١٥ - ٢٢٥$	(١) $١ - ١$
(١٥) $٨١ - ٥٤$	(٢) $٢ - ٢$
(١٦) $١٠ - ٢٥$ ص	(٣) $١٢ - ١٢$
(١٧) $٣ - ٢ + ٢$	(٤) $١ - ١$
(١٨) $٦ - ٢ + ٢ + ٤$ ص	(٥) $٧ - ٧$
(١٩) $٢ - ٢ - ٢ + ٢$ ص	(٦) $٨ - ٢$
(٢٠) $١٣ - ٢٣ + ٢٦$ ب	(٧) $١٥ - ٢٥$
(٢١) $٢ - ٢ - ٢ + ٢$ ص	(٨) $٣ - ٢$
(٢٢) $٦ - ٢ - ٩ + ١٢$ ص	(٩) $٢ + ٢$ ص
(٢٣) $٥ - ١٠ - ٢ - ١٥$ ب	(١٠) $٢ - ٢$ ص
(٢٤) $١٧ - ١٤ + ١٤$	(١١) $٥ - ٢٥$ ص
(٢٥) $٣٨ - ١٥٧$ ب	(١٢) $٢٥ + ١٥$
	(١٣) $١٦ + ٦٤$ ص

بند ١٢٧ - يمكن تحليل أى مقدار إلى عوامله متى أمكن ترتيب حدوده أقساما لكل منها عامل مركب مشترك بين الجميع

(مثال ١) لتحليل  $٢ - ١ - ٢ + ١$  ب إلى عوامله

قول إنه بالتأمل نجد أن الحدين الأول والثاني لهما عامل مشترك وهو  $س$  وأن الحدين الآخرين لهما عامل مشترك وهو  $ب$  فنحصر الحدين الأول والثاني بين قوسين وكذا الحدين الثالث والرابع بين قوسين آخرين

$$\text{فيكون } س٢ - س١ + س٢ + س١ - س٢ = (س٢ - س١) + (س٢ + س١)$$

$$= س(س - ١) + س(١ + س)$$

$$= (س - ١) \text{ مكورة } س \text{ من المئات مضافا إليها } (س - ١) \text{ مكورة } ب \text{ من المئات}$$

$$= (س - ١) \text{ مكورة } (س + ب) \text{ من المئات}$$

$$= (س - ١)(س + ب)$$

(مثال ٢) لتحليل المقدار  $س٢ - ١٩س + ٤١٦$  إلى عوامله

$$\text{قول إن } س٢ - ١٩س + ٤١٦ = (س٢ - ١٣س) + (س٢ - ٦س + ٤١٦)$$

$$= س٣ - (١٣س - ٦س) + (١٣س - ٦س)٢$$

$$= (س٢ - ٦س + ٣)(س٢ - ١٣س)$$

(مثال ٣) لتحليل المقدار  $س٢ - ١٤س + ٤١٣$  إلى عوامله

$$\text{قول إن } س٢ - ١٤س + ٤١٣ = (س٢ - ١٣س) + (س٢ - ١س + ٤١٣)$$

$$= س٣ - (١٣س - ١س) + (١٣س - ١س)٢$$

$$= (س٢ - ١س + ٤)(س٢ - ١٣س)$$

(ملاحظة) يكفي في ترتيب الكيات إلى أقسام يشتمل كل منها على حدين أن يراعى وجود عامل مشترك بين حدى كل قسم ففي المثال الأخير يمكن إجراء العمل على غير ما سبق بأن ترتب الحدود مفتى على كيفية مغايرة السابقة كما يأتى

$$س٢ - ١٤س + ٤١٣ = (س٢ - ١٣س + ٤) - (س٢ - ١س - ٤١٣)$$

$$= (س٢ - ١س + ٤)١٣ - (س٢ - ١س - ٤١٣)$$

$$= (س٢ - ١س + ٤)(١٣ - ١٣)$$

وهذه النتيجة هي عين النتيجة السابقة لأن تغيير ترتيب عوامل أى حاصل ضرب لا يغير قيمته

### (تمارين ١٧ ب)

حال كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(٦) $س٢ - ١س + ٥س - ١٥$	(١) $س٢ + س٢ + س٢ + س٢$
(٧) $س٢ + س٢ + س٢ + س٢$	(٢) $س٢ - س٢ + س٢ - س٢$
(٨) $س٢ - س٢ - س٢ - س٢$	(٣) $س٢ + س٢ + س٢ + س٢$
(٩) $س٢ - س٢ - س٢ - س٢$	(٤) $س٢ + س٢ + س٢ + س٢$
(١٠) $س٢ + س٢ + س٢ + س٢$	(٥) $س٢ + س٢ + س٢ + س٢$

$۱۹) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵$	$(۱۱) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵$
$(۲۰) ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$	$(۱۲) ۱ - ۲ + ۳ - ۴ - ۵$
$(۲۱) ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$	$(۱۳) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵$
$(۲۲) ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷$	$(۱۴) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵$
$(۲۳) ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$	$(۱۵) ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$
$(۲۴) ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶$	$(۱۶) ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$
$(۲۵) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$	$(۱۷) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$
$(۲۶) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$	$(۱۸) ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷$
$(۲۷) ۱ + ۲ + ۳ - ۴ - ۵ - ۶$	$(۲۷) ۱ + ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$
$(۲۸) ۱ + ۲ + ۳ - ۴ - ۵ - ۶$	$(۲۸) ۱ + ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$
$(۲۹) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$	$(۲۹) ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶$
$(۳۰) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$	$(۳۰) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$

### تحليل المقادير ذات ثلاثة الحدود إلى عواملها

بند ١٢٨ - يحسن بالتعلم قبل الشروع في فهم الحالة التالية من حالات التحليل إلى عوامل أن يراجع بند ٤٤ من الباب الخامس فقد انتهت في ذلك البند إلى الكيفية التي بها يمكن وضع حاصل ضرب مقسدين من ذوات الحدين على هيئة مقدار ذي ثلاثة حدود وذلك بتوفيق معاملات حدود المقسدين الأصليين بعضها مع بعض

(مثلاً) علمنا أنه بمقتضى ما جاء في بند ٤٤ أن

$$\begin{aligned} (1) \quad & \dots \dots \dots 10 + \text{سم} 8 + \frac{7}{\text{سم}} = (3 + \text{سم}) (0 + \text{سم}) \\ (2) \quad & \dots \dots \dots 10 + \text{سم} 8 - \frac{7}{\text{سم}} = (3 - \text{سم}) (0 - \text{سم}) \\ (3) \quad & \dots \dots \dots 10 - \text{سم} 2 + \frac{7}{\text{سم}} = (3 - \text{سم}) (0 + \text{سم}) \\ (4) \quad & \dots \dots \dots 10 - \text{سم} 2 - \frac{7}{\text{سم}} = (3 + \text{سم}) (0 - \text{سم}) \end{aligned}$$

وسنبحث الآن في عكس هذه العملية المتقدمة أى في تحليل مقدار ذى ثلاثة حدود كالمقادير المبينة على يسار المتطابقات الموضحة آنفا إلى عاملين كل منهما مقدار ذو حدين بالتأمل في كل من المتطابقات الأربع السابقة نرى أن

(۱) الحَدَّ الْأَوَّلُ فِي كُلِّ مِنَ الْعَامِلِينَ مِنْهُ

(٢) حاصل ضرب الحدة الثانية من أحد العاملين في الحدة الثانية من العامل الآخر هو الحدة الثالثة لعدد ذي الثلاثة الحدود فمثلاً نرى في (٢) أن ١٥ هي حاصل ضرب ٥ - في ٣ -

وفي (٣) أن - ١٥ هو حاصل ضرب + ٥ في - ٣

(٣) حاصل الجمع الجبرى للحقيقتين الثانيتين في العامتين هو معامل  $\alpha$  في المقدار ذى الثلاثة الحدود مثلا في (٤) حاصل جمع  $5x^2 + 3x - 2$  وهو معامل  $\alpha$  في المقدار ذى الثلاثة الحدود وسنستعمل هذه الاستنتاجات في تحليل الكليات مبتدئين بالحالة التي يكون فيها الحد الثالث من المقدار ذى الثلاثة الحدود موجبا

(مثال ١) لتحليل المقدار  $س + ١١$  +  $س + ٢٤$  إلى عوامله  
 نقول إن الحدين الثانيين للعاملين المراد إيجادهما هما المقداران اللذان حاصل ضربهما  $س + ٢٤$   
 ومجموعهما  $س + ١١$  ومن الواضح أنه لا بد أن يكونا  $س + ٨$  +  $س + ٣$  وعلى ذلك يكون  
 $س + ١١ + س + ٢٤ = (س + ٨) (س + ٣)$

(مثال ٢) لتحليل المقدار  $س - ١٠$  +  $س + ٢٤$  إلى عوامله  
 نقول إن الحدين الثانيين للعاملين هما المقداران اللذان حاصل ضربهما  $س + ٢٤$  ومجموعهما  $س - ١٠$   
 ومن ذلك نرى أنه لا بد وأن يكونا سالبين وأن يكون أحدهما  $س - ٦$  والآخر  $س - ٤$  وعلى ذلك يكون  
 $س - ١٠ + س + ٢٤ = (س - ٦) (س - ٤)$

(مثال ٣) لتحليل المقدار  $س - ١٨$  +  $س + ٨١$  إلى عوامله  
 نقول إن  $س - ١٨ + س + ٨١ = (س - ٩) (س + ٩)$

(مثال ٤) لتحليل  $س + ١٠$  +  $س + ٢٥$  إلى عوامله  
 نقول إن  $س + ١٠ + س + ٢٥ = (س + ٥) (س + ٥)$

(مثال ٥) لتحليل المقدار  $س - ١١$  +  $س + ١٠$  إلى عوامله  
 نقول إن الحدين الثانيين من العاملين هما المقداران اللذان حاصل ضربهما  $س + ١٠$  ومجموعهما  $س - ١١$   
 فاذن يلزم أن يكونا  $س - ١١$  +  $س - ١٠$   
 $س - ١١ + س - ١٠ = (س - ١١) (س - ١٠)$

(ملاحظة) يلزم المتعلم أن يحقق نتيجة حل الأمثلة التي من هذا القبيل بضرب العوامل التي يحصل  
 عليها بعضها في بعض ضربا عقليا كما ورد في الباب الخامس

### (تمارين ١٧ - ٥)

حل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) $٢ + ١٣ + ١٤$	(١٢) $٩٠ + ٢١ + ٢٢$
(٢) $١ + ٢ + ١٤$	(١٣) $٨٤ + ١٩ - ٢٢$
(٣) $١٢ + ١٧ + ١٤$	(١٤) $٧٨ + ١٩ - ٢٢$
(٤) $١٢ + ١٧ - ٢٢$	(١٥) $٤٥ + ١٨ - ٢٢$
(٥) $٣٠ + ١١ - ٢٢$	(١٦) $٩٦ + ٢٠ + ٢٢$
(٦) $٥٦ + ١٥ - ٢٢$	(١٧) $١٦٥ + ٢٦ - ٢٢$
(٧) $٩٠ + ١٩ - ٢٢$	(١٨) $١٠٤ + ٢١ - ٢٢$
(٨) $٤٢ + ١٣ + ٢٢$	(١٩) $٩٢ + ٢٣ + ٢٢$
(٩) $١١٠ + ٢١ - ٢٢$	(٢٠) $٩٥ + ٢٤ - ٢٢$
(١٠) $١٠٨ + ٢١ - ٢٢$	(٢١) $٢٥٦ + ٣٣ - ٢٢$
(١١) $٨٠ + ٢١ - ٢٢$	(٢٢) $٢٢٥ + ٣٠ + ٢٢$

$٣٠٠ + ٢ ٩ ٣٧ + ٤ ٩ (٣٦) \checkmark$	$٧٢٩ + ١ ٥٤ + ٩ (٢٣)$
$٢ ٧٥ + ٢ ٢٠ - ٩ (٣٧)$	$٣٦١ + ١ ٣٨ - ٩ (٢٤) +$
$٢ ٣٩٠ + ٢ ٤٣ + ٢ ٤٣ (٣٨)$	$٢ ٤٩ + ٢ ١٤ - ٩ (٢٥)$
$٢ ٥٤ + ٢ ٢٩ - ٩ (٣٩)$	$٢ ٦ + ٢ ٥ + ٩ (٢٦)$
$٦٥٦١ + ٢ ١٦٢ + ٤ ٤٠ (٤٠) \checkmark$	$٢ ٤٠ + ٢ ١٣ - ٢ (٢٧)$
$٢ ١٢ - ٧ - ٢ (٤١)$	$٢ ٢٢ - ٢ ٢٢ + ٢ ١٠٥ + ٢ (٢٨) +$
$٢ ٢٠ + ٩ + ٢ (٤٢)$	$٢ ٢٣ - ٢ ٢٣ + ٢ ١٣٢ + ٢ (٢٩)$
$٢ ٢٣ - ١٣٢ + ٢ (٤٣)$	$٢ ٢٦ - ٢ ٢٦ + ٢ ١٦٩ + ٢ (٣٠)$
$٢ ٨٨ + ١٩ + ٢ (٤٤) \checkmark$	$٢ ٨ + ٢ ٧ + ٢ (٣١)$
$٢ ١٣٠ + ٣١ + ٢ ٢ ٢ ٢ (٤٥)$	$٢ ٩ + ٢ ٩ + ٢ ١٤ + ٢ (٣٢) +$
$٢ ١٤٣ - ٢ ٢٤ + ٢ ٢ ٢ (٤٦)$	$٢ ١٦ - ٢ ٢ ٢ ٢ + ٢ ٣٩ (٣٣)$
$٢ ٢٩ - ٢ ٢٠٤ + ٢ (٤٧)$	$٢ ٤٩ + ٢ ٢ ٢ ٢ + ٢ ٦٠٠ (٣٤)$
$٢ ٢١٦ + ٢ ٣٥ + ٢ (٤٨) \checkmark$	$٢ ٣٤ + ٢ ٢ ٢ ٢ + ٢ ٢٨٩ - (٣٥)$

بند ١٢٩ - لنبحث الآن في تحليل المقادير ذات ثلاثة الحدود إلى عواملها حينما يكون الحد الثالث من هذه المقادير سالبا

(مثال ١) لتحليل المقدار  $٢ + ٢ - ٣٥$  إلى عوامله

نقول إن الحدين الثانيين للعاملين هما المقداران اللذان حاصل ضربهما - ٣٥ ومجموعهما الجبري ٢ فيجب أن تكون علامة أحد الحدين مخالفة لعلامة الآخر ويجب أن تكون علامة الأكبر + لأنها علامة حاصل جمعهما

فالحذان إنف  $٥ - ٦٧ +$

$$\therefore (٢ + ٢ - ٣٥) = (٧ + ٢) (٥ -)$$

(مثال ٢) لتحليل المقدار  $٣ - ٣ - ٥٤$  إلى عوامله

نقول إن الحدين الثانيين للعاملين المراد إيجادهما هما المقداران اللذان حاصل ضربهما - ٥٤ ومجموعهما الجبري - ٣ ويجب أن تخالف علامة كل منهما علامة الآخر كما أن علامة الأكبر يجب أن تكون - لأنها علامة حاصل الجمع

فالحذان إنف  $٦ + ٦٩ -$

$$\therefore (٣ - ٣ - ٥٤) = (٩ -) (٦ +)$$

وقد تبني استعمال الطريقة الآتية لتحليل الكميات التي من هذا القبيل متى راعينا أن علامتي الحدّين الرئيسين في العاملين يجب أن تكونا متضادّتين

(مثال ٣) لتحليل المقدار  $٢ ٢ ٢ ٢ + ٢ ٢٣ - ٤٢٠$  إلى عوامله

نأتي بعدددين حاصل ضربهما  $٤٢٠$  وفرقهما  $٢٣$  وهما  $٣٥$  و  $١٢$

وبوضع العلامتين قبلهما بحيث تكون علامة الأكبر + ينتج أن

$$(٢ ٢ ٢ ٢ + ٢ ٢٣ - ٤٢٠) = (٣٥ +) (١٢ -)$$

## (تمارين ١٧ د)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(٢٥) $٢ - ١ - ٢١٠ - ٢$	(١) $٢ - ٢ - ٢$
(٢٦) $١١٥ - ٢ - ١٨ - ٢$	(٢) $٢ - ٢ + ٢$
(٢٧) $٢٧ - ٢ - ٢٠ - ٢$	(٣) $٦ - ٢ - ٢$
(٢٨) $٢٦٠ - ٢ - ١٦ - ٢$	(٤) $٦ - ٢ + ٢$
(٢٩) $٢٦ - ١١ - ٢$	(٥) $٣ - ٢ - ٢$
(٣٠) $٢٤٠ - ٢ - ١٤ - ٢$	(٦) $٣ - ٢ + ٢$
(٣١) $٥٦ - ٢ - ٢$	(٧) $٥٦ - ٢ + ٢$
(٣٢) $٥١ - ٢ - ١٤ - ٢$	(٨) $٤٠ - ٢ + ٢$
(٣٣) $٢٧ - ٢ - ٢ - ٢$	(٩) $١٢ - ٢ - ٤ - ٢$
(٣٤) $١٠ - ٢ - ٢ - ٢$	(١٠) $٢٠ - ٢ - ٢$
(٣٥) $٢٨ - ٢ - ١٢ - ٢$	(١١) $٢١ - ٢ - ٤ - ٢$
(٣٦) $٢٤٣ - ٢ - ١٨ - ٢$	(١٢) $٢٠ - ٢ + ٢$
(٣٧) $٣٠٠ - ٢ - ١٣ - ٢$	(١٣) $١١٧ - ٢ - ٤ - ٢$
(٣٨) $١٣٢ - ٢ - ٢ - ٢$	(١٤) $٣٦ - ٢ + ٩ - ٢$
(٣٩) $٤٦٢ - ٢ - ٢ - ٢$	(١٥) $١٥٦ - ٢ + ٢$
(٤٠) $٨٧٠ - ٢ + ٢ - ٢$	(١٦) $١١٠ - ٢ + ٢$
(٤١) $٢ - ٢ + ٢ - ٢$	(١٧) $٩٠ - ٢ - ٩ - ٢$
(٤٢) $٢ - ٢ + ٦ - ٢$	(١٨) $٢٤٠ - ٢ - ٢$
(٤٣) $١١٠ - ٢ - ٢ - ٢$	(١٩) $٨٥ - ٢ - ١٢ - ٢$
(٤٤) $٣٨٠ - ٢ - ٢ - ٢$	(٢٠) $١٥٢ - ٢ - ١١ - ٢$
(٤٥) $١٢٠ - ١٧ - ٢ - ٢$	(٢١) $٢٤ - ٢ - ٥ - ٢$
(٤٦) $٦٥ + ٨ - ٢ - ٢$	(٢٢) $٦٠ - ٢ + ٧ - ٢$
(٤٧) $٩٨ - ٧ - ٢ - ٢$	(٢٣) $٤٢ - ٢ + ١ - ٢$
(٤٨) $٢٠٤ - ٥ - ٢ - ٢$	(٢٤) $١٠٥ - ٢ - ٣٢ - ٢$

[ لو أراد الطالب الاطلاع على تمارين متنوعة بسيطة فليتنظر في صفحة ١٣٦ ]

بند ١٣٠ - نشرع الآن في بيان كيفية تحليل المقادير ذات الثلاثة الحدود إلى عواملها إذا كان معامل أكبر قوة فيها ليس بالواحد الصحيح

باتباع ما جاء في الباب الخامس بند ٤٤ يمكننا أن نكتب حواصل ضرب الآتية

$$(١) \quad (٣ + ٢) (٣ + ٢) = ٣^٢ + ٣ \cdot ٢ + ٢ \cdot ٣ + ٢^٢ = ٩ + ٦ + ٦ + ٤ = ٢٥ \dots \dots \dots (١)$$

$$(٢) \quad (٣ - ٢) (٣ - ٢) = ٣^٢ - ٣ \cdot ٢ - ٢ \cdot ٣ + ٢^٢ = ٩ - ٦ - ٦ + ٤ = -١ \dots \dots \dots (٢)$$

$$(٣) \quad (٣ + ٢) (٣ - ٢) = ٣^٢ - ٣ \cdot ٢ + ٢ \cdot ٣ - ٢^٢ = ٩ - ٦ + ٦ - ٤ = ٥ \dots \dots \dots (٣)$$

$$(٤) \quad (٣ - ٢) (٣ + ٢) = ٣^٢ - ٢ \cdot ٣ + ٣ \cdot ٢ - ٢^٢ = ٩ - ٦ + ٦ - ٤ = ٥ \dots \dots \dots (٤)$$

وبالعكس إذا أردنا تحليل مقادير كالتى على يسار هذه المتطابقات إلى عواملها نلاقى صعوبات أشد مما لاقينا فى استخراج عوامل المقادير السابقة وقبل أن نأتى بقاعدة عامة لتحليل مثل هذه المقادير يجب أن نبحث بحثاً دقيقاً فى متطابقتين من المتطابقات الأربع السابقة كما سنبينه

$$\text{من المتطابقة } ٣^٢ - ٣ \cdot ٢ + ٢ \cdot ٣ - ٢^٢ = ٩ - ٦ + ٦ - ٤ = ٥ \text{ نعلم أن}$$

الحلقة الأولى  $٣^٢ - ٣ \cdot ٢$  حاصل ضرب  $٣$  فى  $٣$

والحلقة الثالثة  $٢ \cdot ٣ - ٢^٢$  حاصل ضرب  $٢$  فى  $٢$

والحلقة الأوسط  $٩ - ٦$  حاصل جمع كل من حاصل ضرب  $٣$  فى  $٣$  و  $٢$  فى  $٢$

ومن المتطابقة  $٣^٢ - ٣ \cdot ٢ - ٢ \cdot ٣ + ٢^٢ = ٩ - ٦ - ٦ + ٤ = -١$  نعلم أن

الحلقة الأولى  $٣^٢ - ٣ \cdot ٢$  حاصل ضرب  $٣$  فى  $٣$

والحلقة الثالثة  $-٢ \cdot ٣ + ٢^٢$  حاصل ضرب  $٢$  فى  $٢$

والحلقة الأوسط  $-٦ + ٤$  حاصل جمع كل من حاصل ضرب  $٣$  فى  $٣$  و  $٢$  فى  $٢$

وعلمة هذا الحلقة سالبة لأن علامة أكبر حاصل ضرب سالبة

بند ١٣١ - يصعب على المبتدئ فى غالب الأوقات أن يستخرج العوامل لأول وهلة ولا سبيل لازالة هذه الصعوبة إلا كثرة التمرن على التحليل فى أبسطه يمكنه إيجاد العوامل على وجه الصحة والسرعة

(مثال) لتحليل المقدار  $٧^٢ - ١٩$  إلى عوامله

نحسب أولاً  $(٧^٢ - ١٩)$  ملاحظين أن علامة العدد  $١٩$  يجب أن تكون مخالفة لعلامة  $٧^٢$  ومن هذين العاملين ينتج  $٧^٢$  وهو الحلقة الأولى  $٦ - ١٩$  وهو الحلقة الثالثة ولكن لكون  $٧^٢ - ١٩ = ٤٩ - ١٩ = ٣٠$  وهو غير معامل الحلقة الأوسط فالعاملان اللذان اخترناهما لا يأتیان بالفرض المقصود

فنحسب بعد ذلك  $(٧^٢ - ١٩)$

ومن حيث إن  $٧^٢ - ١٩ = ٤٩ - ١٩ = ٣٠$  يكون هذان العاملان حيث هما العاملان الصحيحان المطلوبان بعد وضع العلامات بحيث تكون الكمية سالبة هى الأكبر

$$\text{والذى يكون } ٧^٢ - ١٩ = ٤٩ - ١٩ = ٣٠ = (٧ + ١٩) (٧ - ١٩)$$

(وتحقق هذه النتيجة بإجراء الضرب عقلاً)

بند ١٣٢ - ليس من الضروري في تحليل المقادير إلى عواملها أن ندون جميع هذه التجارب بالتفصيل فكثرة الترتن تعود الطالب اختيار العوامل الصحيحة ونبد غيرها بمجرد لحظها ويجب الالتفات بنوع خاص إلى ما يأتي

(أولاً) إذا كان الحد الثالث من المقدار ذي الثلاثة الحدود موجبا فعلامة كل من الحدين الثانيين للعاملين واحدة وهي علامة الحد الأوسط من المقدار ذي الثلاثة الحدود

(ثانياً) إذا كان الحد الثالث من المقدار ذي الثلاثة الحدود سالبا كانت علامتا العاملين متضادتين

(مثال ١) لتحليل المقدارين الآتيين إلى عواملهما

$$(١) \quad ١٤س^٢ + ٢٩س - ١٥ \dots \dots \dots$$

$$(٢) \quad ١٤س^٢ - ٢٩س - ١٥ \dots \dots \dots$$

نقول إنه يمكن أن نضع في كلتا الحالتين (٧س - ٣) (٢س - ٥) على سبيل التجربة مع ملاحظة أن علامة ٣ تكون مخالفة لعلامة ٥ ولكون  $٧ \times ٥ - ٣ \times ٢ = ٢٩$  فالعاملان هما المطلوبان غير أنه يجب الالتفات إلى وضع علامات الحدود

ففي (١) يلزم أن تكون الكمية الموجبة هي الأكبر وفي (٢) يجب أن تكون الكمية السالبة هي الأكبر

$$\text{وإذن يكون } ١٤س^٢ + ٢٩س - ١٥ = (٧س - ٣)(٢س - ٥)$$

$$١٤س^٢ - ٢٩س - ١٥ = (٧س + ٣)(٢س - ٥)$$

(مثال ٢) لتحليل المقدارين الآتيين إلى عواملهما

$$(١) \quad ٥س^٢ + ١٧س + ٦ \dots \dots \dots$$

$$(٢) \quad ٥س^٢ - ١٧س + ٦ \dots \dots \dots$$

نلاحظ في (١) أن العاملين اللذين ينتجان ٦ يجب أن يكونا موجبين

ونلاحظ في (٢) أن العاملين اللذين ينتجان ٦ يجب أن يكونا سالبين

إذن يمكننا أن نضع عاملي (١) هكذا (٥س + ) (س + )

وعاملي (٢) هكذا (٥س - ) (س - )

$$\text{ولكون } ٥ = ٢ \times ١ + ٣ \times ٥$$

$$\text{يكون } ٥س^٢ + ١٧س + ٦ = (٥س + ٢)(س + ٣)$$

$$٥س^٢ - ١٧س + ٦ = (٥س - ٢)(س - ٣)$$

(ملاحظة) من المحتمل في كل من المقدارين السابقين أن يكون ٦ عاملي ١ ٦ ولكن من

السهل أن نرى أن هذين العاملين لا يوافقان

$$(٣) \quad ٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ = (٣س - ٨)(٣س - ٨)$$

$$= (٣س - ٨)^٢$$

$$(٤) \quad ٦ + ٧س - ٥س^٢ = (٣س + ٥)(٢س - ٢)$$



## (تمارين ١٧ هـ)

حاصل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

١٤ - ٣ (٢٦)	١ + ٣ + ٢ (١)
٣٥ + ٢ (٢٧)	٢ + ٥ + ٣ (٢)
١٤ - ٢ (٢٨)	٢ + ٥ + ٢ (٣)
١٤ + ٢ (٢٩)	٣ + ١٠ + ٢ (٤)
٢٦ + ٢ (٣٠)	٤ + ٩ + ٢ (٥)
١٥ + ٢ (٣١)	٤ + ٨ + ٢ (٦)
٣ - ٢ (٣٢)	٦ + ٧ + ٢ (٧)
٣٥ + ٢ (٣٣)	٥ + ١١ + ٢ (٨)
١٠ - ٢ (٣٤)	٦ + ١١ + ٢ (٩)
١٥ - ٢ (٣٥)	٢ + ١١ + ٢ (١٠)
١٠ + ٢ (٣٦)	٢ - ٣ + ٢ (١١)
١٥ - ٢ (٣٧)	٢ - ٣ + ٢ (١٢)
٢١ - ٢ (٣٨)	٣ - ١١ + ٢ (١٣)
٧٢ + ٢ (٣٩)	٥ - ١٤ + ٢ (١٤)
٤ - ٢ (٤٠)	٨ - ١٥ + ٢ (١٥)
٢ - ٢ (٤١)	١ - ٢ (١٦)
٢ - ٢ (٤٢)	٦ - ٧ + ٢ (١٧)
٢ - ٢ (٤٣)	٢٨ - ٢ + ٢ (١٨)
٢ - ٢ (٤٤)	٣٠ - ١٣ + ٢ (١٩)
٢ - ٢ (٤٥)	٣ - ٧ + ٢ (٢٠)
٢ - ٢ (٤٦)	٣ - ٧ - ٢ (٢١)
٢ - ٢ (٤٧)	٤ + ٧ + ٢ (٢٢)
٢ - ٢ (٤٨)	١٤ + ٢٣ + ٢ (٢٣)
٢ - ٢ (٤٩)	١٥ - ٢ (٢٤)
٢ - ٢ (٥٠)	١٤ - ١٩ + ٢ (٢٥)

الفرق بين المربعين

بند ١٣٣ - إذا ضرب (١ + ب) في (١ - ب) تحلث المتطابقة

$$(١ + ب) (١ - ب) = ١ - ب^٢$$

وقد يمكن التعبير عن حاصل الضرب بالعبارة الآتية

حاصل ضرب مجموع كيتين في فاضلهما يساوي فرق مربعيهما

وبالعكس فرق مربعي أي كيتين يساوي حاصل ضرب مجموعهما في فاضلهما

وعلى ذلك يمكننا أن نحلل أي مقدار يدل على الفرق بين مربعين إلى عوامله لأول وهلة

(مثال) لتحليل المقدار ٢٥ - ١٦ صه إلى عوامله  
 نقول إن ٢٥ - ١٦ صه = (٥ صه) - (٤ صه)  
 إذن العامل الأول حاصل جمع ٥ صه ٦ صه والثاني فرق ٤ صه من ٥ صه  
 وعلى ذلك يكون ٢٥ - ١٦ صه = (٥ صه + ٤ صه) (٥ صه - ٤ صه)  
 ويمكن في غالب الأوقات إهمال السطر الأول من الحل فنذكر العوامل مباشرة  
 (مثال) ١ - ٤٩ صه = (١ + ٧ صه) (١ - ٧ صه)  
 ويمكن معرفة فرق مربعي كيتين عدديتين بواسطة تطبيق القانون ١ - (١ + ٧ صه) (١ - ٧ صه)  
 (مثلا) (٣٢٩) - (١٧١) = (٣٢٩ + ١٧١) (٣٢٩ - ١٧١)  

$$١٥٨ \times ٥٠٠ =$$
  

$$٧٩٠٠٠ =$$

### (تمارين ١٧ و)

حل كل من المقادير الآتية إلى عوامله

١٤ - ٩ (٣٥)	٢ - ٢ صه (١٨)	٤ - ٢ صه (١)
٢٥ - ٤٩ صه (٣٦)	٣٦ - ٢ صه (١٩)	٨١ - ٢ صه (٢)
١٦ - ٢ صه (٣٧)	٢٠ - ٤ صه (٢٠)	١٠٠ - ٢ صه (٣)
٢٥ - ٢ صه (٣٨)	٩ - ٢ صه (٢١)	١٤٤ - ٢ صه (٤)
١٠٠ - ١ (٣٩)	١٢١ - ٩ صه (٢٢)	٩ - ٢ صه (٥)
٦٤ - ٢٥ صه (٤٠)	٢٥ - ٢ صه (٢٣)	٤٩ - ٢ صه (٦)
٨١ - ١٢١ صه (٤١)	٤٩ - ٨١ صه (٢٤)	١٢١ - ٢ صه (٧)
٦٤ - ٢ صه (٤٢)	٢٥ - ٢ صه (٢٥)	٤٠٠ - ٢ صه (٨)
٢٥ - ٢ صه (٤٣)	٣٦ - ١ صه (٢٦)	٩ - ٢ صه (٩)
١٦ - ٢ صه (٤٤)	٩ - ٢ صه (٢٧)	٢٥ - ٢ صه (١٠)
٨١ - ٢ صه (٤٥)	٢٥ - ٢ صه (٢٨)	٣٦ - ٢ صه (١١)
١٦ - ٢ صه (٤٦)	٤٩ - ٢ صه (٢٩)	٩ - ٢ صه (١٢)
٤٩ - ٢ صه (٤٧)	٦٤ - ٢ صه (٣٠)	٣٦ - ٢ صه (١٣)
١٠٠ - ١ صه (٤٨)	٩ - ٢ صه (٣١)	٤ - ٢ صه (١٤)
٢٥ - ٢ صه (٤٩)	٢٥ - ٢ صه (٣٢)	١٠٠ - ٤٩ صه (١٥)
١٦ - ٢ صه (٥٠)	١ - ٢ صه (٣٣)	٢٥ - ١ صه (١٦)
	٤ - ٢ صه (٣٤)	٤ - ٢ صه (١٧)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية بواسطة تحليله إلى عوامله

(٦٨٩) - (١٨١١) (٥٩)	(٢٥٣) - (٧٥٣) (٥٥)	(٤٢٥) - (٥٧٥) (٥١)
(٣٦٩) - (٢٧٣١) (٦٠)	(٩٩) - (١٠١) (٥٦)	(١٢٠) - (١٣١) (٥٢)
(٨١٣١) - (٨١٣٣) (٦١)	(٣٧٧) - (١٧٣٣) (٥٧)	(٢٥٠) - (٧٥٠) (٥٣)
١ - (١٠٠١) (٦٢)	(٧٣٩) - (١٦٣٩) (٥٨)	(٣١٩) - (٣٣٩) (٥٤)

بند ١٣٤ - نستعمل الطريقة المتقدمة في التحليل حينما يكون أحد المبرعين أو كلاهما مركبا  
 (مثال ١) لتحليل المقدار  $(١ + ٢٢)٢ - ١٦٢$  إلى عوامله  
 نقول إن مجموع  $١ + ٢٢$  هو  $٤ + ٢٢ + ١$  و الفرقها هو  $١ - ٢٢ - ٤$   
 $\therefore (١ + ٢٢)٢ - ١٦٢ = (٤ + ٢٢ + ١)(٤ - ٢٢ + ١)$   
 (مثال ٢) لتحليل المقدار  $٦٢ - (٢٢ - ٣٢)$  إلى عوامله  
 نقول إن مجموع  $٦٢ - ٢٢$  هو  $٣٢ - ٢٢ + ٣٢$  و الفرقها هو  
 $٣٢ - (٢٢ - ٣٢) = ٣٢ + ٢٢ - ٣٢$   
 $\therefore (٢٢ - ٣٢) - (٣٢ - ٢٢) = (٣٢ + ٢٢ - ٣٢)$   
 وإذا اشتغلت العوامل على حدود متشابهة تختصر تلك الحدود وتكتب العوامل بأبسط صورها  
 (مثال ٣) :  $(٣٢ + ٧٢ - ٢٢) - (٣٢ - ٧٢ + ٢٢)$   
 $= \{ (٣٢ + ٧٢ - ٢٢) + (٣٢ - ٧٢ + ٢٢) \} - \{ (٣٢ - ٧٢ + ٢٢) - (٣٢ + ٧٢ - ٢٢) \}$   
 $= (٣٢ + ٧٢ - ٢٢ + ٣٢ - ٧٢ + ٢٢) - (٣٢ - ٧٢ + ٢٢ - ٣٢ + ٧٢ - ٢٢)$   
 $= (٤٢ + ٢٢) - (١٠٢)$

(تمطويات ١٧ ص)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| (١) $(١٦) - (١ + ٢)٢$   | (١) $٢ - (١ + ٢)٢$    |
| (١٧) $(١٧) - (١ - ٢)٢$  | (٢) $٢ - (١ - ٢)٢$    |
| (١٨) $١ - (٧ + ٢)٢$     | (٣) $(٣ + ٢)٢ - ٤٢$   |
| (١٩) $(١٩) - (١ + ٢)٢$  | (٤) $(٢ + ٢)٢ - ١$    |
| (٢٠) $(٢٠) - (١ - ٢)٢$  | (٥) $(٢٣ + ١)٢ - ١٦٢$ |
| (٢١) $(٢١) - (١ - ٢)٢$  | (٦) $(١٥ + ٢)٢ - ٩٢$  |
| (٢٢) $(٢٢) - (١ + ٢)٢$  | (٧) $١ - (٢٥ + ٢)٢$   |
| (٢٣) $(٢٣) - (١ + ٢)٢$  | (٨) $(٢ - ٢)٢ - ١$    |
| (٢٤) $(٢٤) - (١٧ - ٢)٢$ | (٩) $(٢ - ٢)٢ - ٩٢$   |
| (٢٥) $(٢٥) - (١ - ٢)٢$  | (١٠) $(٢ - ٢)٢ - ١$   |
| (٢٦) $(٢٦) - (١ - ٢)٢$  | (١١) $(٢ + ٢)٢ - ١$   |
| (٢٧) $(٢٧) - (١٥ - ٢)٢$ | (١٢) $(٢ - ٢)٢ - ١$   |
| (٢٨) $(٢٨) - (١ - ٢)٢$  | (١٣) $(٢ - ٢)٢ - ٩٢$  |
| (٢٩) $(٢٩) - (٢ + ٢)٢$  | (١٤) $(٢ - ١)٢ - ١$   |
|                         | (١٥) $(٢ - ١)٢ - ١$   |



## (تمارين ١٧ ع)

حلل كلام من المصادر الآتية إلى عوامله

- (١)  $س^٢ + ٢س + صه + صه - ٢$
- (٢)  $٢ - ٢ + ٢ + ٢ - ٢$
- (٣)  $س^٢ - ١٦ + ١٦ - ١٦ + ١٦$
- (٤)  $٢٩ - ٢ + ١٤ + ١٤ - ٢٩$
- (٥)  $س^٢ + ١٢ + ١٢ - ٢$
- (٦)  $٢١٢ + ١ + صه + صه - ٢$
- (٧)  $س^٢ - ١٢ - ١٢ + ٢$
- (٨)  $صه - ٢ + ٢٢ - ٢ - ٢$
- (٩)  $١ - س^٢ - ٢س - صه - صه$
- (١٠)  $٢ - س^٢ - صه + ٢س - صه$
- (١١)  $س^٢ + صه + ٢س - صه - ٢س - ٢$
- (١٢)  $٢ - ١٤ + ١٤ - ٢٩ + ٢٩$
- (١٣)  $س^٢ + ٢س - صه + صه - ١٢ - ٢$
- (١٤)  $٢ - ١٢ + ١٢ - ٢ - ٢ - ٢$
- (١٥)  $س^٢ - ١٤ + ١٤ - ٢ - ٢ - صه - صه$
- (١٦)  $صه + ٢س - صه + ٢ - ١٦ - ٢ - ٢$
- (١٧)  $س^٢ - ٢س - ١ + ١ - ١٤ - ١٤$
- (١٨)  $٢٩ - ١٦ - ١ + ١ - س^٢ - ٨ - ١٦$
- (١٩)  $س^٢ - ١ + صه - صه - ٢ - ١٢ + ١٢$
- (٢٠)  $٢ + ١٢ - ١٢ - ٢ - ٢ - ٢$
- (٢١)  $٢٤ - س^٢ - ١٢ - ٢ - ٢ - ٢ + ٢٩$
- (٢٢)  $٢ + ٢٦ - س^٢ - ٢٩ - ١٠ - ١ - ٢٥$
- (٢٣)  $٢ - ٢٥ + س^٢ + ١٨ - س^٢ + ٩ + ٢٠ - ١٦ - ٢$
- (٢٤)  $س^٢ - س^٢ - ٩ - ١٢ + س^٢ + ٦ + ٢$
- (٢٥)  $٢ + ٢ + ٢ + ٢$
- (٢٦)  $س^٢ + ٤س - صه + ١٦ - ٢$
- (٢٧)  $٢٤ + ٢٩ + ٢٨ + ٢٨$
- (٢٨)  $٢ + ٢٢ + ٢٢ + ٢٢$
- (٢٩)  $س^٢ + صه - ١١ - س^٢ - ٢$
- (٣٠)  $٢٤ - ٢٥ - ٢ + ٢$

## مجموع مكعبين أو فرقهما

بند ١٣٦ - إذا قسمنا  $أ + ب$  على  $أ$  فان الخارج يكون  $أ - ب + ١$  وإذا قسمنا  $أ - ب$  على  $أ - ١$  فان الخارج يكون  $أ + ب + ١$  ومن هنا نستنتج المتطابقتين الآتيتين

$$(١) \quad ١ + ٢ = ٣ \quad (أ + ١) (أ - ١ + ١) = (أ + ١) (ب + ١)$$

$$(٢) \quad ١ - ٢ = -١ \quad (أ - ١) (أ + ١ + ١) = (أ - ١) (ب + ١ + ١)$$

ومن هاتين المتطابقتين يمكننا أن نستنتج كيفية تحليل أى مقدار يمكن وضعه على هيئة مجموع مكعبين أو فرقهما

$$(مثال ١) \quad ٨ س٢ - ٢٧ س٢ = (٢ س٢) - (٣ س٢) \\ = (٢ س٢ - ٣ س٢) (٤ س٢ + ٦ س٢ + ٩ س٢)$$

(ملاحظة) الحد الأوسط  $٦ س٢$  حاصل ضرب  $٢ س٢$  في  $٣ س٢$

$$(مثال ٢) \quad ١ + ٦٤ س٢ = (١) + (٤ س٢) = (١ + ٤ س٢) (١ - ٤ س٢ + ١٦ س٢)$$

$$(١ + ٤ س٢) (١ - ٤ س٢ + ١٦ س٢)$$

ويمكن أن يحل السطر الأول من العمل وتكتب العوامل لأول وهلة

$$(مثال ٣) \quad ٣٤٣ س٢ - ٢٧ س٢ = (٧ س٢ - ٣ س٢) (٤٩ س٢ + ٢١ س٢ + ٩ س٢)$$

$$(٨ س٢ + ٧٢٩ س٢) = (٢ س٢ + ٩ س٢) (٤ س٢ - ١٨ س٢ + ٨١ س٢)$$

(تمارين ١٧ ط)

حل كل من المصادر الآتية إلى عوامله

(٢٩) $١٢٥ س٢ + ٨ س٢$	(١٥) $٥١٢ س٢ + ١٢ س٢$	(١) $٢ س٢ - ٢ س٢$
(٣٠) $٢١٦ س٢ - ٢٧ س٢$	(١٦) $١٠٠٠ س٢ - ١ س٢$	(٢) $٢ س٢ + ٢ س٢$
(٣١) $٢٧ س٢ - ٢٧ س٢$	(١٧) $٦٤ س٢ + ٢٧ س٢$	(٣) $١ س٢ - ٢ س٢$
(٣٢) $١٢٥ س٢ + ٦٤ س٢$	(١٨) $١٠٠٠ س٢ - ٢٧ س٢$	(٤) $١ س٢ + ١ س٢$
(٣٣) $٨ س٢ - ٢٧ س٢$	(١٩) $٢١٦ س٢ + ٨ س٢$	(٥) $٨ س٢ - ٢٧ س٢$
(٣٤) $٢١٦ س٢ - ٢٧ س٢$	(٢٠) $٨ س٢ - ٣٤٣ س٢$	(٦) $٨ س٢ + ٢٧ س٢$
(٣٥) $٣٤٣ س٢ + ٨ س٢$	(٢١) $٢٧ س٢ + ٨ س٢$	(٧) $٢٧ س٢ + ٨ س٢$
(٣٦) $٧٢٩ س٢ + ٨ س٢$	(٢٢) $٢٧ س٢ - ٦٤ س٢$	(٨) $٨ س٢ - ١ س٢$
(٣٧) $٧٢٩ س٢ - ٨ س٢$	(٢٣) $١٢٥ س٢ - ١ س٢$	(٩) $٢٧ س٢ - ٨ س٢$
(٣٨) $٢٧ س٢ - ٢٧ س٢$	(٢٤) $٢١٦ س٢ - ٢٧ س٢$	(١٠) $٢٧ س٢ + ٨ س٢$
(٣٩) $٦٤ س٢ - ٢٧ س٢$	(٢٥) $٢٧ س٢ + ٨ س٢$	(١١) $٣٤٣ س٢ - ١ س٢$
(٤٠) $٥١٢ س٢ - ٢٧ س٢$	(٢٦) $١ س٢ - ٢٧ س٢$	(١٢) $٦٤ س٢ + ٢٧ س٢$
	(٢٧) $١٠٠٠ س٢ + ٣٤٣ س٢$	(١٣) $١٢٥ س٢ + ٨ س٢$
	(٢٨) $٧٢٩ س٢ - ٦٤ س٢$	(١٤) $٢١٦ س٢ - ٨ س٢$

بند ١٣٦ - (١) أوضنا في البنود من ١٢٨ إلى ١٣٢ كيفية تحليل المقادير ذات الثلاثة الحدود إلى عواملها بطريقة التجربة وفي البنود من ١٣٣ إلى ١٣٥ بينا طريقة تحليل فرق أى مربعين إلى عاملين والآن نشرح القاعدة العامة التي بها يمكن وضع أى مقدار مثل

$$س^٢ + طس + ك أو س + ب س + ح$$

في صورة مقدار مكوّن من فوق مربعين

$$علما من البند ١١٢ أن س^٢ + ١٢س + ٩ = (س + ٣)^٢$$

$$\text{وأن } س^٢ - ١٢س + ٩ = (س - ٣)^٢$$

إذن إذا كان المقدار ذو الثلاثة الحدود مربعا كاملا وكان معامل أكبر قوة وهي هنا س^٢ الوحدة فالحّد المجزؤ عن س يساوى دائما مربع نصف معامل س وعلى ذلك إذا علم الحدان الأوّل والثاني (أى اللذان يشتملان على س^٢ ٦ س هنا) من مقدار ذى ثلاثة حدود يمكن جعل المربع كاملا بإضافة مربع نصف معامل س

$$\text{فتلا المقدار } س^٢ + ٦س + ٩ يصبح مربعا كاملا إذا أضفنا إليه (٣)^٢ أى ٩$$

$$\text{وجيئذ يكون } س^٢ + ٦س + ٩ + ٩ = (س + ٣)^٢$$

$$\text{وكذلك نجعل المقدار } س^٢ - ٧س + ٧ مربعا كاملا بأن نضم إليه (٧/٢)^٢ أى ٤٩/٤$$

$$\text{وجيئذ يكون } س^٢ - ٧س + ٧ + ٤٩/٤ = (س - ٧/٢)^٢$$

(ملاحظة) الحد المضاف لتكثير المربع دائما موجب

$$\text{(مثال ١) لتحليل المقدار } س^٢ + ٦س + ٥ \text{ إلى عوامله}$$

$$\text{نقول يمكن وضع هذا المقدار هكذا } (س + ٣)^٢ + ٩ - ٥$$

$$\text{أى أن } س^٢ + ٦س + ٥ = (س + ٣)^٢ - ٤$$

$$= (س + ٣)^٢ - (٢)^٢$$

$$= (س + ٥)(س + ١)$$

$$\text{(مثال ٢) ما عاملا } س^٢ - ٧س - ٢٢٨$$

$$\text{لذلك نقول إن } س^٢ - ٧س - ٢٢٨ = (س - ٧/٢)^٢ - (٤٩/٤) - ٢٢٨ =$$

$$= (س - ٧/٢)^٢ - ٩١١/٤$$

$$= (س - ٧/٢)^٢ - (٣١)^٢$$

$$= (س + ١٢)(س - ١٩)$$

$$\text{(مثال ٣) ما عاملا } س^٢ - ١٣س + ١٤$$

$$\text{لذلك نقول إن } س^٢ - ١٣س + ١٤ = (س - ١٣/٢)^٢ - (١٦٩/٤) + ١٤ =$$

$$= (س - ١٣/٢)^٢ - (١٣)^٢$$

$$= (س - ١٣/٢)^٢ - (١٣)^٢$$

$$= (س - ١٣/٢)^٢ - (١٣)^٢$$

$$= (س - ١٣/٢)^٢ - (١٣)^٢$$

$$= (س - ١٣/٢)^٢ - (١٣)^٢$$

بما أن طريقة التحليل يجعل المربع كاملا عامة وتنطبق على كافة الاحوال يحسن استعمالها فيما إذا رأى المتعلم أن التحليل بطريقة التجربة غير مؤكد ومثل (مثلا) إذا أريد تحليل المقدار  $٢٤س^٢ + ١١٨س - ٢٤٧$  إلى عوامله يفضل استخدام الطريقة العامة لأقول وهلة  
بند ١٣٦ - (ب) تشتمل التمارين الآتية على أمثلة بسيطة متنوعة على الأحوال المختلفة التي سبق شرحها في هذا الباب

## (تمارين متنوعة ١٧ ي)

تطبيقات على البندين ١٢٨ و ١٢٩

حل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١٩) $٢٤س + ١١س + ٢$	(١٠) $٢س^٢ - ٣س + ٢$
(٢٠) $٢٤س - ٥س + ٢$	(٢) $١٠س + ٧س + ١$
(٢١) $٣٦س + ٩س - ٢$	(٣) $١٢س + ٥س - ٢$
(٢٢) $٤س + ١٤س - ٢$	(٤) $٢١س - ٤س - ٢$
(٢٣) $١٦س + ١٠س + ٢$	(٥) $١١س + ١٢س + ٥$
(٢٤) $٤٥س - ٥س - ٢$	(٦) $٥س - ٤س - ٢$
(٢٥) $٨٨س + ٢٣س + ٢$	(٧) $٢٠س + ١٢س + ٢$
(٢٦) $٤٥س - ١٢س - ٢$	(٨) $١٠س + ٩س - ٢$
(٢٧) $٣٩س + ١٠س + ٢$	(٩) $٢٤س - ٢س - ٢$
(٢٨) $٧٢س - ٢س - ٢$	(١٠) $١١س + ٥س - ٢$
(٢٩) $٢٠س - ٤س - ٢$	(١١) $٩س - ٩س - ٢$
(٣٠) $٥٦س + ٢س - ٢$	(١٢) $٤٨س + ١٤س - ٢$
(٣١) $٢٦س + ١١س - ٢$	(١٣) $٨١س + ١٨س + ١$
(٣٢) $٥٦س + ١س - ٢$	(١٤) $٨١س - ٢٤س - ٢$
(٣٣) $١٥٦س + ٢س - ٢$	(١٥) $٨١س + ٣٠س + ٢$
(٣٤) $٧٨س - ٧س - ٢$	(١٦) $٤٩س + ١٤س - ٢$
(٣٥) $٣٥س - ٢س - ٢$	(١٧) $٢١س + ١٠س - ٢$
(٣٦) $٩١س + ٦س - ٢$	(١٨) $٦٣س + ٢س - ٢$

(تطبيقات على البنود من ١٢٥ إلى ١٣٢)

حل كلا من المقادير الآتية إلى عاملين أو أكثر

(٤٠) $٥س + (٥ + ١)س + (٥ + ١)س$	(٣٧) $٢٣س^٢ - ٢٣س + ٢$
(٤١) $٥س - ٢س + ٤س - ٢س - ٢س$	(٣٨) $١٠س + ٢٥س - ٢س$
(٤٢) $٢س + ٣س + ٢س$	(٣٩) $١٥س - ٢س - ٢س$



$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٥)	$٥ + ١١ + ٢٢$ (٤٣)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٦)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٤٤)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٧)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٤٥)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٨)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٤٦)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٩)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٤٧)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٦٠)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٤٨)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٦١)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٤٩)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٦٢)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٠)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٦٣)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥١)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٦٤)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٢)
$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٦٥)	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٣)
	$٢٢٠ + ٢٢٠ + ٢٢٠$ (٥٤)

(تطبيقات على البتود من ١٣٥ إلى ١٣٦ أ)

$٢٨٩ - ٢٨٩$ (٨٥)	$٢٢٠ + ٢٢٠$ (٧٦)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٦٦)
$٢٧٢ - ٢٧٢$ (٨٦)	$٢٢٠ + ٢٢٠$ (٧٧)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٦٧)
$٢٧ - ٢٧$ (٨٧)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٧٨)	$٢٢٠ + ٢٢٠$ (٦٨)
$٢٩٩ - ٢٩٩$ (٨٨)	$٢٢٠ + ٢٢٠$ (٧٩)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٦٩)
$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٨٩)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٨٠)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٧٠)
$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٩٠)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٨١)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٧١)
$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٩١)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٨٢)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٧٢)
$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٩٢)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٨٣)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٧٣)
$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٩٣)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٨٤)	$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٧٤)
		$٢٢٠ - ٢٢٠$ (٧٥)

بند ١٣٧ - أمثلة متنوعة على تحليل المقادير إلى عواملها

(مثال ١) لتحليل المقدار  $٨١ - ٩$  إلى عوامله

قول إن  $٨١ - ٩ = (٩ + ٩) (٩ - ٩)$

$= (٩ + ٩) (٩ - ٩)$

(مثال ٢) لتحليل المقدار  $٨١ - ٩$  إلى عوامله

قول إن  $٨١ - ٩ = (٩ + ٩) (٩ - ٩)$

$= (٩ + ٩) (٩ - ٩)$

$(٩ + ٩) (٩ - ٩)$

(ملاحظة) إذا أمكن وضع مقدار جبري على صورة الفرق بين مربعين أو على صورة الفرق بين

المكعبين فالأفضل في تحليله أن نبتدئ باستعمال قاعدة الفرق بين مربعين

(مثال ٣) لتحليل المقدار  $٢٨س^٤صه + ٦٤س^٣صه - ٦٠س^٢صه$  إلى عوامله  
نقول إن  $٢٨س^٤صه + ٦٤س^٣صه - ٦٠س^٢صه = ٤س^٢صه(٧س^٢ + ١٦س - ١٥)$

$$= ٤س^٢صه(٧س^٢ - ٥س + ٣)$$

(مثال ٤) لتحليل المقدار  $٨س^٢ح - ٨س^٢صه - ٤س^٢د + ٣٢س^٢د$  إلى عوامله

$$\text{نقول إن هذا المقدار} = ٨س^٢صه(٨ - صه) - ٤س^٢د(٨ - ٣صه)$$

$$= ٨س^٢صه(٨ - صه) - ٤س^٢د(٨ - ٣صه)$$

$$= ٨س^٢صه(٨ - صه) + ٢س^٢صه(٨ - صه) + ٢س^٢د(٨ - ٣صه) - ٢س^٢د(٨ - ٣صه)$$

(مثال ٥) لتحليل المقدار  $٤س^٢صه - ٢٥س^٢ + ٢س + ٥$  إلى عوامله

$$\text{نقول إن} ٤س^٢صه - ٢٥س^٢ + ٢س + ٥ = ٤س^٢صه(٥ - ٢س) + ٢س(٥ - ٢س) + ٥(٥ - ٢س)$$

$$= (٥ - ٢س)(٤س^٢صه + ٢س + ٥)$$

حلل كلا من المقدارين الآتيين إلى عاملين أو أكثر

(١٠٧) $٢٤٧س - ٦س - ٢$	(٩٤) $٦٤س - ٢$
(١٠٨) $٢٧٩س - ١٢٢س - ١$	(٩٥) $٧٢٩س - ٦٤س$
(١٠٩) $٢٥٠(١ - ب) + ٢$	(٩٦) $١س - ٨$
(١١٠) $٢(٤ - د) + ٢(٤ + د)$	(٩٧) $٧٢٩س - ١٢٢س - ١$
(١١١) $٨(٢س + صه) - ٢(٢س - صه)$	(٩٨) $١٦٤س - ١٢٢س$
(١١٢) $٢س - ٤س + ٢س - ٢س$	(٩٩) $١٢٢س - ١٢٢س$
(١١٣) $١س - ١س + ١س - ١س$	(١٠٠) $٤س^٢صه + ٤س^٢صه + ٤س^٢صه$
(١١٤) $١س + ١س + ١س + ١س$	(١٠١) $١٢٢س + ١٢٢س$
(١١٥) $١س + ١س + ١س + ١س$	(١٠٢) $٢س + ١٧س + ٣٥س$
(١١٦) $١س - ١س + ١س - ١س$	(١٠٣) $٥٠٠س - ٢٠س$
(١١٧) $٤(٢س - صه) - ٢(٢س - صه)$	(١٠٤) $١ - (١ + ب)$
(١١٨) $٢س^٢صه - ٢س^٢صه - ٢س^٢صه + ٢س^٢صه$	(١٠٥) $١ - (١ + د)$
	(١٠٦) $١ - (٢س - صه)$

[ الباب الثامن والعشرون وكذلك الأسئلة المتنوعة (٤) الواردة في صفحة ١٨٠ تنفيذ في التمرن على تحليل المقدارين الجبرية إلى عواملها ]

### أسئلة متنوعة (٣)

(١) اطرح  $٣س^٢ - ٧س + ١$  من  $٢س^٢ - ٥س - ٣$  ثم ا طرح الباقي من صفر

وضم هذا الناتج الأخير إلى  $٢س^٢ - ٢س - ٤$

(٢) اختصر  $١٣(٤ - ب) - ٤(٥ - ب) + ٤(٥ - ب) - ١(٥ - ب) + ٣(٥ - ب)$

(٣) ما حاصل ضرب  $١٢س - ١٢س + ١٢س - ١٢س$  في  $٢س - ٢س + ٢س - ٢س$



(١٨) رجل معه ٥٠ جنيا في جيب و ٦ جنيات في جيب آخر فأخذ من الجيب الأول مبلغا ووضعه في الثاني وبذا صار ما في هذا الأخير  $\frac{9}{5}$  ما بقى في الجيب الأول فما المبلغ الذي نقل للجيب الثاني

$$(١٩) \text{ اختصر } \frac{١٥}{٢٣} \times \frac{١٤٩}{٢٣٤٠} \div \frac{٢١٧}{٤٣٦٤}$$

$$(٢٠) \text{ بين أن } ١ - (١ - ١)(١ - ١)(١ - ١) = (١ - ١)(١ - ١)(١ - ١) + ١ - ١$$

$$(٢١) \text{ بين بالرموز الجبرية أن}$$

(١) زيادة م على ن أكبر من ١ بمقدار م

(٢) ثلاثة أمثال مربع ا ب مضافا إليها مكعب م تساوى مجموع م و م مكررا ط من المرات

$$(٢٢) \text{ حل المعادلة } \frac{٣}{٤} - (٣ - \frac{٨}{٣}) = (\frac{٣}{٤} - ٧) = ١٥ = (\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٣})$$

وبرهن أنها لا تصح إذا كانت م = ٢

$$(٢٣) \text{ لإقسم حاصل ضرب } ٣ - ٢ - ٢ - ٢ \text{ في } ٢ - ٢ - ٢ \text{ على } ٢ - ٢ - ٢$$

$$(٢٤) \text{ ما ثمن كل من } ١٢ \text{ تفاحة و } ٢٠ \text{ بيضة إذا كان ثمن } ٦٠ \text{ تفاحة و } ١٠٠ \text{ بيضة } ٤٠ \text{ قرشا و ثمن } ٧٢ \text{ تفاحة يساوى ثمن } ٣٠ \text{ بيضة}$$

$$(٢٥) \text{ أكتب حاصل الضرب } (٢ - ١٣ + ١٥)(٢ - ٤ - ٥)(٢ - ٢ - ٣) \text{ على صورة عوامل بسيطة واستنتج من ذلك جذره التربيعى وضعه على صورة حاصل ضرب ثلاثة عوامل كل منها ذو حدين}$$

$$(٢٦) \text{ إذا كانت } ٦ - ٦ = ٦ = ٦ = ٦ = ٦ \text{ فما قيمة}$$

$$(٢٧) \text{ لإقسم } ٦ - ٥٧ + ١٢٨ + ١٢٨ - ٦٠ - ٦٠ - ١٣٠ \text{ على } ٦٣ + ١٥ + ٧ + ٩ - ٦$$

$$(٢٨) \text{ حل المعادلات في المجموعة الآتية}$$

$$٤ + ٢ + ٦ = ١٤ = ٣٦ - ٣ - ٦ + ٧ = ٣ = ٦ + ٧ - ٦ = ٢٣$$

$$(٢٩) \text{ حل كل من}$$

$$(١) \text{ } ٢ - ٢ - ٢ = ٢$$

$$(٢) \text{ } ٢ + ٢ - ٢ = ٢$$

إلى عاملين أو أكثر .

$$(٣٠) \text{ في كم يوم يتم } ١ \text{ من الرجال } \frac{1}{٢} \text{ من عمل يمكن إتمامه جميعه بواسطة } ٦ \text{ من الرجال في } ٦$$

$$\text{الأيام؟ إذا ذكر المقدار الرقى للجواب إذا كانت م } ٤ = ١٦ = ٢٤ = ٦ = ١٤ = ٦ = ١٨$$

## (1-2)

نرى أنه بتحليل المقادير إلى عواملها يحدث أن

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ (2) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ (3) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

(تكملة ١٨)

أوجد العامل المشترك الأعلى للمقادير الآتية

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (2) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (3) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (4) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (5) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (6) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (7) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (8) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (9) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (10) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (11) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (12) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (13) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (14) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (15) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (16) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (17) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (18) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (19) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (20) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (21) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (22) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (23) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (24) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (25) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (26) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (27) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ (28) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (٢٩) \quad & ٢ \text{ سر} - ٩ \text{ سر} - ١٦ \text{ سر} - ٦ \text{ سر} - ١٤ \text{ سر} + ٣ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} \\
 (٣٠) \quad & ٢ \text{ سر} + ٩ \text{ سر} + ٤ \text{ سر} + ٢٦ \text{ سر} + ١١ \text{ سر} + ٥ \text{ سر} + ٢٦ \text{ سر} - ٣ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} \\
 (٣١) \quad & ٣ \text{ سر} + ٨ \text{ سر} + ٤ \text{ سر} + ٦ \text{ سر} + ١١ \text{ سر} + ٦ \text{ سر} - ٣ \text{ سر} - ٦ \text{ سر} \\
 & ٣ \text{ سر} - ١٦ \text{ سر} - ١٢ \text{ سر}
 \end{aligned}$$

بند ١٤٠ - ينبغي إيجاد العامل المشترك الأعلى بمجرد النظر كلما تيسر ذلك ولكن لا يسهل أحيانا تحليل المقادير إلى عواملها فتستعمل عند ذلك طريقة مشابهة للطريقة المستعملة في الحساب لاستخراج القاسم المشترك الأعظم بين عددين أو أكثر

بند ١٤١ - سدين الآن الطريقة الجبرية لإيجاد العامل المشترك الأعلى بإيراد بعض أمثلة مؤجلين شرح البرهان الوافي لتلك الطريقة إلى ما بعد ولكن نذكر قاعدتين يجب أن يلتفت إليهما عند حل الأمثلة الآتية :

- (١) إذا اشغل مقدار ما على عامل فكل مكرر لهذا المقدار يقبل القسمة على ذلك العامل
- (٢) إذا كان لمقدارين عامل مشترك فانه يقسم كلا من حاصل جمعهما وباقي طرحهما كما أنه يقسم كلا من حاصل جمع أو باقى طرح أى مكررين لها

( مثال ) أوجد العامل المشترك الأعلى للمقدارين الآتيين

٤ سر - ٣ سر - ٢٤ سر - ٩ سر - ٨٦ سر - ٢ سر - ٥٣ سر - ٣٩ سر	
٢ سر - ٩ سر - ٢٤ سر - ٣ سر - ٤ سر	٣٩ سر - ٥٣ سر - ٢ سر - ٩ سر
٨ سر - ٣ سر - ٦ سر - ٤٨ سر - ١٨ سر	٤ سر - ٢ سر - ٥ سر - ٢١ سر
٢ سر - ٤ سر - ٥ سر - ٢١ سر	٤ سر - ٢ سر - ٦ سر - ١٨ سر
٣ سر + ٣ سر	٣ سر - ٣ سر

وحيل ذلك يكون سر - ٣ العامل المشترك الأعلى

(شرح العملية) أولا نرتب كلا من المقدارين المعطيين حسب القوى الصاعدة أو النازلة للحرف سر ولكون درجة الحد الأول في كل من المقدارين واحدة يجعل المقدار الذى يكون فيه معامل الحد الأعلى درجة أصغر منه في الآخر مقسوما عليه ويرتب العمل في خانات يوازى بعضها بعضا كما هو مبين آنفا ونضع خارج القسمة ٢ على يسار المقسوم عليه

وحينما يصير أول باقى وهو ٤ سر - ٥ سر - ٢١ سر مقسوما عليه نضع الخارج سر على يمينه وإذا ما جعلنا الباقى الثانى وهو ٢ سر - ٣ سر - ٩ سر مقسوما عليه نضع الخارج ٢ على يساره وهكذا فالمقسوم عليه الأخير سر - ٣ يكون العامل المشترك الأعلى المطلوب كما في علم الحساب

بند ١٤٢ — تستعمل هذه الطريقة في استخراج العامل المشترك الأعلى المركب فقط وليلاحظ أنه من الواجب عزل العوامل البسيطة المشتركة في المقادير المفروضة ثم حفظ عاملها المشترك الأعلى إن كان لها عامل مشترك أعلى وضربه في العامل المركب الذي يستخرج بالطريقة السابق شرحها

(مثال) ما العامل المشترك الأعلى للقدارين

٢٤ سر<sup>٤</sup> - ٢ سر<sup>٢</sup> - ٦٠ سر<sup>٢</sup> - ٣٢ سر<sup>٤</sup> ١٨ ٦ سر<sup>٤</sup> - ٦ سر<sup>٢</sup> - ٣٩ سر<sup>٢</sup> - ١٨ سر<sup>٢</sup>  
لذلك نقول إن ٢٤ سر<sup>٤</sup> - ٢ سر<sup>٢</sup> - ٦٠ سر<sup>٢</sup> - ٣٢ سر<sup>٤</sup> = ٢ سر<sup>٢</sup> (١٢ سر<sup>٢</sup> - ٢ سر<sup>٢</sup> - ٣٠ سر<sup>٢</sup> - ١٦ سر<sup>٢</sup>)  
وإن ١٨ سر<sup>٤</sup> - ٦ سر<sup>٢</sup> - ٣٩ سر<sup>٢</sup> - ١٨ سر<sup>٢</sup> = ٣ سر<sup>٢</sup> (٦ سر<sup>٢</sup> - ٢ سر<sup>٢</sup> - ١٣ سر<sup>٢</sup> - ٦ سر<sup>٢</sup>)  
والعامل المشترك بين ٢ سر<sup>٢</sup> ٣ ٦ سر<sup>٢</sup> هو سر<sup>٢</sup>

فنعزل العاملين البسيطين ٢ سر<sup>٢</sup> ٣ ٦ سر<sup>٢</sup> من المقدارين المعلومين ونحفظ العامل المشترك بينهما وهو سر<sup>٢</sup> ونجري باقي العمل كما في بند ١٤١ على الوجه الآتي

٢	٦ - سر <sup>٢</sup> - ١٣ سر <sup>٢</sup> - ٢ سر <sup>٢</sup> - ٦ سر <sup>٢</sup>	١٦ - سر <sup>٢</sup> - ٢ سر <sup>٢</sup> - ٣٠ سر <sup>٢</sup> - ١٦ سر <sup>٢</sup>
	٨ سر <sup>٢</sup> - ٢ سر <sup>٢</sup> - ٦ سر <sup>٢</sup>	١٢ - سر <sup>٢</sup> - ٤ سر <sup>٢</sup> - ٢٦ سر <sup>٢</sup> - ١٢ سر <sup>٢</sup>
	٦ - سر <sup>٢</sup> - ٥ سر <sup>٢</sup> - ٦ سر <sup>٢</sup>	٤ - سر <sup>٢</sup> - ٤ سر <sup>٢</sup> - ٣ سر <sup>٢</sup> + ٢ سر <sup>٢</sup>
	٨ - سر <sup>٢</sup> - ٨ سر <sup>٢</sup> - ٦ سر <sup>٢</sup>	٣ سر <sup>٢</sup> + ٢ سر <sup>٢</sup> - سر <sup>٢</sup>
٢ - سر <sup>٢</sup>	٢ + سر <sup>٢</sup> - ٣ سر <sup>٢</sup>	٤ - سر <sup>٢</sup> - ٦ سر <sup>٢</sup>
		٤ - سر <sup>٢</sup> - ٦ سر <sup>٢</sup>

فالعامل المشترك الأعلى المراد استخراجه إذن

سر<sup>٢</sup> (٢ + سر<sup>٢</sup> - ٣ سر<sup>٢</sup>)

بند ١٤٣ — رأينا في جميع الأمثلة المتقدمة أن طريقة استخراج القاسم المشترك الأعظم في الحساب تنطبق تماما على المقادير الجبرية التي أوردناها ولكن قد يكون من الضروري في بعض الأحيان إدخال بعض التغييرات على الطريقة الحسابية وهذه التغييرات يمكن فهمها متى راعينا أن كل باق في العملية يشمل العامل المراد استخراجه [راجع القاعدتين ١ ٢ ٦ من بند ١٤١]

(مثال ١) لايجاد العامل المشترك الأعلى للقدارين

٣ سر<sup>٢</sup> - ١٣ سر<sup>٢</sup> + ٢ سر<sup>٢</sup> - ٢٣ سر<sup>٢</sup> + ٢١ سر<sup>٢</sup> ٢١ ٦ سر<sup>٢</sup> + ٢ سر<sup>٢</sup> - ٢٣ سر<sup>٢</sup> - ٢١ سر<sup>٢</sup>

نجرى العمل هكذا

٢	٢١ - سر <sup>٢</sup> - ٢٣ سر <sup>٢</sup> + ٢ سر <sup>٢</sup> - ٢٣ سر <sup>٢</sup> + ٢١ سر <sup>٢</sup>	٢١ + سر <sup>٢</sup> - ٢ سر <sup>٢</sup> - ٢٣ سر <sup>٢</sup> + ٢١ سر <sup>٢</sup>
		٤٢ - سر <sup>٢</sup> - ٤٦ سر <sup>٢</sup> + ٢ سر <sup>٢</sup> - ٤٦ سر <sup>٢</sup> + ٢ سر <sup>٢</sup>
		٢٧ سر <sup>٢</sup> - ٩٠ سر <sup>٢</sup> + ٦٣ سر <sup>٢</sup>



فاذا جعلنا  $٢٧$  سر<sup>٢</sup> -  $٩٠$  سر +  $٦٣$  مقسوما عليه نجد أن  $٣$  سر<sup>٢</sup> -  $١٣$  سر +  $٢٣$  سر -  $٢١$  لا يشتمل عليه مرات صحيحة ولكوننا نرى أنه يمكن كتابة  $٢٧$  سر<sup>٢</sup> -  $٩٠$  سر +  $٦٣$  هكذا  
 $٩$  (  $٣$  سر<sup>٢</sup> -  $١٠$  سر +  $٧$  ) ونعلم أن كل باقى فى العملية يشتمل على العامل المشترك الأعلى المطلوب نستنتج من ذلك أن العامل المذكور يوجد فى المقدار  $٩$  (  $٣$  سر<sup>٢</sup> -  $١٠$  سر +  $٧$  )  
 وبما أن المقدارين الأصليين ليس لهما عامل بسيط مشترك فعاملهما المشترك الأعلى إذن لا يشتمل على عامل بسيط وعلى ذلك يمكننا إخراج العامل  $٩$  من المقسوم عليه والاستمرار فى العملية بأن نجعل  
 $٣$  سر<sup>٢</sup> -  $١٠$  سر +  $٧$  مقسوما عليه كما على

$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٣$ سر + $٢٣$ سر - $٢١$	$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٠$ سر + $٧$ سر
$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٠$ سر + $٧$ سر	$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٠$ سر + $٧$ سر
$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٦$ سر - $٢١$	$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٠$ سر + $٧$ سر
$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٦$ سر - $٢١$	$٣$ سر <sup>٢</sup> - $١٠$ سر + $٧$ سر
$٢$   $٦$ سر - $١٤$	
$٣$ سر - $٧$	
$١$ - سر	

فالعامل المشترك الأعلى إذن  $٣$  سر -  $٧$   
 وقد حذف العامل  $٢$  لنفس السبب الذى لأجله حذف العامل  $٩$  من قبل  
 ( مثال ٢ ) لايجاد العامل المشترك الأعلى للمقدارين

$$(١) \dots\dots\dots ٢ سر - ٣ سر + ٢ سر \dots\dots\dots (٢)$$

نقول إننا لو قسمنا أحد المقدارين على الآخر مباشرة لكان خارج القسمة كسرا ولازالة هذه العقبة نضرب أحد المقدارين فى عامل مناسب كما سبق أننا حذفنا عاملا فى المثال السابق لتسهيل عملية القسمة وجعلها كالاعتاد

ولكون المقدارين ليس لهما عامل بسيط مشترك فلا يتغير عاملهما المشترك الأعلى إذا ضربنا أحدهما فى أى عامل بسيط فنضرب (٢) فى ٢ ثم نجعل (١) مقسوما عليه هكذا

$٣$	$٢ سر - ٣ سر + ٢ سر$	$٦ سر - ٤ سر + ٢ سر$
	$٧$	$٦ سر + ٣ سر - ٦ سر$
$١٤ سر - ٧ سر$	$١٤ سر + ٧ سر - ٢ سر$	$٢ سر + ٥ سر + ٧ سر$
$١٤ سر - ٤ سر$	$١٤ سر - ١٠ سر + ٢ سر$	$١٧$
$١٧ سر - ٣ سر$	$١٧ سر - ٢ سر$	$٣٤ سر + ٨٥ سر + ١١٩ سر$
$١٤ سر - ١٤ سر$	$١٧ سر - ٢ سر$	$٩٨ سر + ٢١ سر + ١١٩ سر$
$١٤ سر - ١٤ سر$		$٦٤ سر - ٦٤ سر$
		$١٧ سر + ١٤ سر - ١ سر$

فالعامل المشترك الأعلى المطلوب إذن سره ١ -  
أدخلنا العامل ٧ بعد أول عملية قسمة لأن - سره ٧ + سره ٥ + سره ٢ - الذى هو أول باقى  
لا يقسم ٢ سره ٢ + سره ٢ - سره ٢ وقيل البدء فى عملية القسمة التالية أدخلنا العامل ١٧ للسبب  
السابق عينه ثم حذفنا العامل ٦٤ للسبب الذى أوضحناه فى المثال الأول  
(ملاحظة) كان الأسهل فى المثال الآخر أن نوجد العامل المشترك الأعلى بترتيب المقدارين حسب  
القوى الصاعدة للحرف سره وحينئذ لا نحتاج إلى إدخال عوامل رقمية أثناء العملية . وكان من المفيد هنا  
أيضا استعمال طريقة المكررات المنزلة التى أوضحناها فى بند ٤٥ فانها قد تضيد فى اختصار العمل كثيرا  
بند ١٤٤ - يظهر من المثالين الأخيرين أنه يمكننا ضرب أو قسمة المقدارين أو أى باقى ينتج  
أثناء العمل فى أى عامل لا يقسم كلا من المقدارين الأصليين

بند ١٤٥ - إذا وضعنا المقدارين المذكورين فى المثال الثانى فى بند ١٤٣ على الوجه الآتى

$$٢ سره ٢ + سره ٢ - سره ٢ = (١ - سره) (٢ سره ٢ + سره ٣ + سره ٢)$$

$$٦ سره ٣ - سره ٢ + سره ٢ = (١ - سره) (٣ سره ٢ + سره ٢ + سره ٢)$$

نرى أن عاملهما المشترك الأعلى سره ١ وإذن لا يوجد عامل مشترك جبرى للمقدارين

$$٢ سره ٢ + سره ٣ + سره ٢ + سره ٢ = ٦ سره ٢ + سره ٢ + سره ٢ = ٦ سره ٢$$

$$٢ سره ٢ + سره ٢ - سره ٢ = ٢ سره ٢ - سره ٢ = ٢ سره ٢$$

$$٦ سره ٣ - سره ٢ + سره ٢ = ٦ سره ٣ - سره ٢ + سره ٢ = ٦ سره ٣$$

والقاسم المشترك الأعظم للمعددين ٤٦٠ ٦ ٥٨٠ هو ٢٠ مع أن سره ١ وهى العامل المشترك  
الأعلى الجبرى تساوى ٥ فقط فى هذه الحالة نرى أن المقدارين الرقيقين لكل من العامل المشترك الأعلى  
الجبرى والقاسم المشترك الأعظم الحسابى لا يتساويان ويمكن التعبير عن سبب هذا الاختلاف بما يأتى  
إذا كانت سره ٦ يصير المقدار

$$٢ سره ٢ + سره ٣ + سره ٢ + سره ٢ مساويا ٩٢ وكذا المقدار ٣ سره ٢ + سره ٢ مساويا ١١٦$$

ولهذين المعددين قاسم مشترك حسابى وهو ٤ مع أن المقدارين ليس لهما عامل مشترك جبرى فيظهر  
أنه كثيرا ما يختلف القاسم المشترك الأعظم الحسابى والعامل المشترك الأعلى الجبرى إذا وضعت للحروف  
مقادير عددية مخصوصة فليس من الصواب إذن استعمال عبارة قاسم مشترك أعظم فى المقادير الجبرية

### (تمارين ١٨ ب)

ما العامل المشترك الأعلى للمقادير الآتية

$$(١) ٢ سره ٢ + سره ٢ - سره ٢ ١٣ سره ٢ + سره ٢ ١٠ سره ٢ + سره ٢$$

$$(٢) ٢ سره ٢ - سره ٢ ٥ سره ٢ - سره ٢ ٩٩ سره ٢ + سره ٢ ٤٠ سره ٢ - سره ٢ ٨٦ سره ٢ + سره ٢ ٣٥$$

$$(٣) ٢ سره ٢ + سره ٢ - سره ٢ ٨ سره ٢ - سره ٢ ١٦ سره ٢ + سره ٢ ٣ سره ٢ - سره ٢ ٨ سره ٢ - سره ٢ ٢٤$$

$$(٤) ٢ سره ٢ + سره ٢ - سره ٢ ٥ سره ٢ - سره ٢ ٢٠ سره ٢ + سره ٢ ٦ سره ٢ - سره ٢ ٥ سره ٢ - سره ٢ ٣٠$$

$$(٥) ٢ سره ٢ - سره ٢ ٥ سره ٢ - سره ٢ ٣ سره ٢ - سره ٢ ٤ سره ٢ - سره ٢ ١١ سره ٢ - سره ٢ ٦$$

$$(٦) ٢ سره ٢ + سره ٢ - سره ٢ ٨ سره ٢ - سره ٢ ٢٤ سره ٢ + سره ٢ ٣ سره ٢ - سره ٢ ٩$$

- (٧)  $٦ - ٥٠ + ١٧ - ٣ - ٦٦ + ١٣ - ٢ + ٣$
- (٨)  $٤ - ٢ - ٤ - ٧ + ٦ + ٣ - ٢ - ٢ + ٢$
- (٩)  $٢ - ٥ + ١١ + ٧ + ٦٤ - ١١ - ٢ + ٢٥ + ٧$
- (١٠)  $٢ + ٤ - ٧ - ١٤ - ٦٦ - ١٠ - ٢١ - ٣٥$
- (١١)  $٣ - ٣ - ٣ - ٢ - ١ - ٩ - ٣ - ٢ - ١$
- (١٢)  $٢ - ٢ + ٣ + ٣ - ٦ - ٤ - ٢ + ٣ - ٩$
- (١٣)  $٣ - ١٣ + ٢ - ٢ - ٦٢ + ٢٦ + ١٢ + ١٢ + ١٨$
- (١٤)  $٢ - ١٩ + ١٩ - ٦٧ - ٤٤ - ٢٠ + ٢٠ + ١٦$
- (١٥)  $١٠ + ٢٥ + ١٥ - ٤٦ + ٩ - ١٢ - ٢ - ١٠$
- (١٦)  $٦ + ١٣ - ١٩ - ١٠ - ٩٦ + ١٢ + ١١ - ١٠$
- (١٧)  $٢٤ - ٧٣ + ٧٣ - ٦ - ٩٠ - ١٥ - ٦$
- (١٨)  $٤ - ١٠ + ٦ - ٦٠ + ٥٤ + ٦٢ - ٣٠ + ١٣١$
- (١٩)  $٤ + ١٤ + ٢٠ + ٧٠ + ٦ - ٨ - ٢٨ - ٨$
- ١٢ - ٥٦ + ٣
- (٢٠)  $٧٢ - ١٢ + ٧٢ - ٤٢٠ - ١٨٦ + ٤٢ + ١٤٢$
- ٢٨٢ + ٣٧٠
- (٢١)  $٩ + ٢ + ٢ + ٣٦ - ٨ - ٥ + ٢ - ٢ - ٢$
- (٢٢)  $١ - ٢ - ٢ + ٦ + ٦ + ٦ - ١$
- (٢٣)  $١ + ٢ + ٢ - ٦ - ١ - ٦ - ٦ + ٦$
- (٢٤)  $٦ - ١٨ - ٣٢ - ١٨ - ٢٠ - ٣٥ - ٩٥ - ٤٠$
- (٢٥)  $٩ - ١٥ - ٢ - ٤٥ - ١٢ - ٤٢ - ٤٩ - ٢٠٣ - ٨٤$
- (٢٦)  $٣ - ٥ - ٢ + ٢٦ - ٥ - ٣$
- (٢٧)  $٤ - ٦ - ٢ - ٢٨ - ٦ - ١٠ - ١٧ - ٣٥ - ١٤$
- بند ١٤٦ - يمكن إثبات صحة ما ورد في بند ١٤١ كما يأتي :
- (أولاً) إذا كانت  $١$  تقسم  $١$  فلا بد أن تقسم  $١$
- البرهان : افرض أن  $١ = ١$  إذن  $١ = ١$  وعليه يكون  $١$  عاملاً من عوامل  $١$
- (ثانياً) إذا كانت  $١$  تقسم  $١$  فلا بد أن تقسم  $١ + ١$
- البرهان : افرض أن  $١ = ١$  وكذا  $١ = ١$
- إذن  $١ + ١ = ٢$
- $١ + ١ = ٢$
- $١ + ١ = ٢$
- ٢

بند ١٤٧ — سنذكر الآن قاعدة إيجاد العامل المشترك الأعلى لأي مقدارين جبريين مركبين وكذا برهانها

نفرض أولاً أننا عزلنا كل العوامل البسيطة (راجع المثال في بند ١٤٢) ونفرض أن  $a$  و  $b$  المقداران الجبريان بعد عزل العوامل البسيطة منهما ونفرض أيضاً أنهما مرتبان حسب القوى النازلة أو الصاعدة لحرف مشترك فيهما وأن أكبر قوة لذلك الحرف في  $b$  ليست أقل من أكبر قوة للحرف نفسه في  $a$

فنقسم  $b$  على  $a$  ونفرض أن  $p$  خارج القسمة  $q$  باقياً ونفرض أن  $c$  تشتمل على عامل بسيط  $m$  فإذا أخرج منه ذلك العامل ينتج مقسوم عليه جديد ولكن  $c$  ونفرض أنه لا يمكن قسمة  $a$  على  $c$  يلزم ضرب  $a$  في عامل بسيط مثل  $d$  وأن خارج القسمة الثاني  $k$  والباقي  $e$  ثم نقسم  $c$  على  $e$  ونفرض أن  $r$  الخارج وأنه لا باقى للقسمة فتكون  $e$  العامل المشترك الأعلى المطلوب ويوضح العمل هكذا

ط	ا	ب
		ط ا
		٢ ٣
	ا ٥	س ك
	ك س	
ر	ي	ر ي

(أولاً) للبرهنة على أن  $e$  عامل مشترك بين  $a$  و  $b$  نقول بالتأمل في خطوات العملية يتضح أن  $e$  تقسم  $c$  وحينئذ تقسم  $k$  و  $s$  ونقسم أيضاً  $e$  و  $c$  و  $a$  إذن تقسم  $a$  وعلى ذلك فهي تقسم  $a$  لكون  $d$  عاملاً بسيطاً وأيضاً بما أن  $e$  تقسم  $c$  فهي تقسم  $m$  و  $a$  أي  $c$  ولكون  $e$  تقسم  $k$  من  $a$   $c$  فهي تقسم أيضاً  $a$  و  $c$  أي  $b$  وعليه فإن  $e$  تقسم  $k$  من  $a$  و  $b$  (ثانياً) للبرهنة على أن  $e$  العامل المشترك الأعلى نقول

إذا لم تكن كذلك نفرض أن  $s$  عامل آخر مشترك درجته أعلى من درجة  $e$  إذن  $s$  تقسم  $a$  و  $b$  وهي لذلك تقسم  $b - ط ا$  أي  $c$  وحينئذ تقسم  $c$  (لأن  $m$  عامل بسيط) وعلى ذلك تقسم  $e$  -  $k$  أي  $e$  وهذا مستحيل لأن  $s$  أعلى درجة من  $e$  يفرض إذن  $e$  العامل المشترك الأعلى

بند ١٤٨ — يمكن استخراج العامل المشترك الأعلى لثلاثة مقادير مثل  $a$  و  $b$  و  $c$  كما يأتي (أولاً) يستخرج العامل المشترك الأعلى للقادرين  $a$  و  $b$  ولكن  $d$  ثم يستخرج العامل المشترك الأعلى للقادرين  $d$  و  $c$  ويكون  $e$  العامل المشترك الأعلى للقادرين  $a$  و  $b$  و  $c$  وذلك لأن  $d$  تشتمل على كل عامل مشترك للقادرين  $a$  و  $b$  ولكون  $e$  العامل المشترك الأعلى للقادرين  $d$  و  $c$  فهي إذن العامل المشترك الأعلى للقادرين  $a$  و  $b$  و  $c$

(ملاحظة) على المبتدئ أن لا يشعرب حذف شيء من الوسط والمقام قبل أن يضع كلا منهما في الصورة الموافقة وذلك لتحليل كل منهما إلى عوامله متى اقتضى الحال ذلك

## (تمارين ١١٩)

إختزل الكسور الآتية

$\frac{س٢ + س٦ + س٤}{س٤ + س٤ + س٤} \quad (١١)$	$\frac{س١٦ - س١٣}{س١٤ - س١٢} \quad (١)$
$\frac{س١١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٦ + س١٢ + س١٢} \quad (١٢)$	$\frac{س١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (٢)$
$\frac{س١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (١٣)$	$\frac{س١٠}{س١٠ - س١٠} \quad (٣)$
$\frac{س١٦ + س١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٢ - س١٢ + س١٢} \quad (١٤)$	$\frac{س١٠}{(س١٠ - س١٠)١٠٠} \quad (٤)$
$\frac{س١٠ - س١٠ - س١٠}{س١٠ - س١٠ - س١٠} \quad (١٥)$	$\frac{س١٠ - س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (٥)$
$\frac{س١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٠ - س١٠ - س١٠} \quad (١٦)$	$\frac{٢٠(س١٠ - س١٠)}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (٦)$
$\frac{س١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (١٧)$	$\frac{س١٠(س١٠ - س١٠)}{س١٠(س١٠ - س١٠)} \quad (٧)$
$\frac{س١٠ - س١٠ - س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (١٨)$	$\frac{س١٠ - س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (٨)$
$\frac{س١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (١٩)$	$\frac{س١٠(س١٠ - س١٠)}{س١٠(س١٠ - س١٠)} \quad (٩)$
$\frac{س١٠ + س١٠ + س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (٢٠)$	$\frac{س١٠ - س١٠}{س١٠ - س١٠ - س١٠} \quad (١٠)$

بند ١٥٢ - إن لم تيسر معرفة عوامل البسط والمقام بمجرد النظر إليها يقسم كل منهما على عاملهما المشترك الأعلى وهذا يستخرج بالطرق المبينة في الباب الثامن عشر

$$\frac{س١٠ - س١٠ - س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad (مثال)$$

(الطريقة الأولى) العامل المشترك الأعلى للبسط والمقام ٣ - س٧

$$\frac{س١٠ - س١٠ - س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} = \frac{س١٠ - س١٠ - س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠} \quad ٦$$

$$\frac{(س١٠ - س١٠ - س١٠)(٧ - س٧)}{(س١٠ + س١٠ + س١٠)(٧ - س٧)} = \frac{س١٠ - س١٠ - س١٠}{س١٠ + س١٠ + س١٠}$$

$$\frac{س١٠ - س١٠ - س١٠}{س١٠ - س١٠ - س١٠} =$$

هذه أسطع الطرق وأسهلها على المبتدئ ولكن في هذه الحالة وما يماثلها من الأحوال يمكن اختزال الكسور بدون إجراء عملية استخراج العامل المشترك الأعلى

(الطريقة الثانية) على حسب ما جاء ببند ١٤١ يلزم أن يكون العامل المشترك الأعمى للبسط والمقام عاملا ل مجموعتهما وهو (١٨ - ٢ - ٥١ - ٢ + ٢١ - ٢) أى عاملا ل مقدار ٣ - ٣ (٣ - ٧) (٢ - ١) فان كان لهما عامل مشترك فلا بد أن يكون ٣ - ٧ - ٧ وبتزيب كل من البسط والمقام بحيث يكون ٣ - ٧ عاملا في كل منهما نجد أن

$$\frac{(٢-٧)(٢-٧) - (٢-٧)(٢-٧) + (٢-٧)(٢-٧)}{(٢-٧)(٢-٧) - (٢-٧)(٢-٧) + (٢-٧)(٢-٧)} = \frac{(٢-٧)(٢-٧)}{(٢-٧)(٢-٧)} = \frac{٢-٧}{٢-٧}$$

بند ١٥٣ - إذا أمكن تحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله بسهولة يمكننا أن نقيع الطريقة الآتية

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \text{ مثلا لا ختزال}$$

نقول إن البسط = ٢ - ٧ = (٢ - ٧) (٢ - ٧) = (٢ - ٧) (٢ - ٧)

ومن هذه العملية يرى أن (٢ - ٧) العامل الوحيد الذى يمكن أن يكون مشتركا

$$\frac{(٢-٧)(٢-٧)}{(٢-٧)(٢-٧)} = \frac{(٢-٧)}{(٢-٧)}$$

$$\frac{(٢-٧)(٢-٧)}{(٢-٧)(٢-٧)} = \frac{(٢-٧)}{(٢-٧)}$$

$$\frac{(٢-٧)(٢-٧)}{(٢-٧)(٢-٧)} = \frac{(٢-٧)}{(٢-٧)}$$

(تبارين ١٩ ب)

اختلف كلا من الكسور الآتية

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٢)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٣)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٤)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٥)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٦)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٧)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٨)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (٩)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١٠)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١١)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١٢)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١٣)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١٤)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١٥)$$

$$\frac{٢-٧}{٢-٧} \quad (١٦)$$

## ضرب الكسور وقسمتها

بند ١٥٤ - (القاعدة الأولى) : لضرب كسر في عدد صحيح يضرب البسط في العدد الصحيح أو يقسم المقام عليه إذا قيل القسمة

البرهان : (أولاً) معنى  $\frac{1}{b}$  أننا أخذنا أجزاء متساوية عددها  $a$  لو أخذ منها عدد يساوى  $b$  لتنتج الوحدة

وتدل  $\frac{a}{b}$  على أجزاء متساوية عددها  $a$  لو أخذ منها عدد يساوى  $b$  لتنتج الوحدة ولكون عدد الأجزاء المأخوذة في الكسر الثانى يساوى عدد الأجزاء المأخوذة في الأول  $c$  من المرات

$$\frac{a}{b} = c \times \frac{1}{b} \quad \text{ينجح أن}$$

$$\text{(ثانياً)} \quad \frac{a}{b} = c \times \frac{1}{b} \quad \text{حسب القاعدة السابقة}$$

$$\frac{a}{b} = \quad \text{[بند ١٥١]}$$

١٥٥ - علمنا من البند السابق أن

$$1 = \frac{b}{b} = b \times \frac{1}{b}$$

أى أن الكسر  $\frac{1}{b}$  عبارة عن المقدار الذى يجب أن يضرب في  $b$  ليكون الناتج  $1$  ولكن من بند ٤٦ نعلم أنه للحصول على  $1$  بضرب  $b$  في مقدار آخر يجب أن يكون هذا المقدار خارج قسمة  $1$  على  $b$  ومن هنا يمكن أن نعرف الكسر بما يأتى

الكسر  $\frac{1}{b}$  خارج قسمة  $1$  على  $b$

بند ١٥٦ - (القاعدة الثانية) قسمة كسر على عدد صحيح نقسم بسط الكسر على ذلك العدد إن قبل القسمة عليه وإلا فنضرب مقام الكسر في العدد الصحيح

البرهان : (أولاً) يدل الكسر  $\frac{a}{b}$  على أجزاء متساوية عددها  $a$  لو أخذ منها عدد يساوى  $b$  لتكون الوحدة

ويدل الكسر  $\frac{1}{b}$  على أجزاء متساوية عددها  $1$  لو أخذ منها عدد يساوى  $b$  لتكون الوحدة ولكون عدد الأجزاء المأخوذة في الكسر الأول يساوى عدد الأجزاء المأخوذة في الثانى  $c$  من المرات

فالكسر الثانى إذن خارج قسمة الكسر الأول على  $c$  أى أن  $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}$

(ثانياً) إذا كان البسط لا يقبل القسمة على  $c$  نرى أن

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} \div c = \frac{1}{b} \div c$$

$$= \frac{a}{bc} \quad \text{كما تقسم في الحالة الأولى}$$

بند ١٥٧ - (القاعدة الثالثة) : لضرب كسرين أو عدة كسور بعضها في بعض تضرب جميع البسوط ويعمل حاصل الضرب بسطاً ثم تضرب جميع المقامات ويعمل الحاصل مقاماً



(مثال ذلك) ما مقدار  $\frac{p}{s} \times \frac{1}{u}$

نفرض أن  $\frac{p}{s} \times \frac{1}{u} = s$

وبضرب كل من الطرفين في  $u \times s$  يحدث أن

$$s \times u \times \frac{p}{s} \times \frac{1}{u} = s \times u \times s$$

$$(بند ٢٩) \quad s \times \frac{p}{s} \times u \times \frac{1}{u} =$$

$$(بند ١٥٤) \quad p \times 1 =$$

$$p \times 1 = s \times u \times s \quad \therefore$$

وبقسمة الطرفين على  $u \times s$  يحدث أن  $s = \frac{p}{s}$

$$\frac{p}{s} = \frac{p}{s} \times \frac{1}{u} \quad \therefore$$

وكذلك  $\frac{p}{s} \times \frac{1}{u} = \frac{p}{s} \times \frac{p}{s} \times \frac{1}{u}$  وهكذا مهما بلغ عدد الكسور

بند ١٥٨ - (القاعدة الرابعة) لقسمة كسر على آخر قلب المقسوم عليه ونضربه في المقسوم

ولكون القسمة عكس الضرب يمكننا أن نعرف الخارج  $s$  الناتج من قسمة  $\frac{1}{u}$  على  $\frac{p}{s}$

بأنه المقدار الذي إذا ضرب في  $\frac{p}{s}$  ينتج  $\frac{1}{u}$  أي أن  $s = \frac{p}{s} \times \frac{1}{u}$

وبضرب الطرفين في  $\frac{s}{p}$  يحدث أن  $s = \frac{s}{p} \times \frac{p}{s} \times \frac{1}{u}$

$$\frac{s}{p} \times \frac{1}{u} = s \quad \therefore$$

وإذن يكون  $\frac{s}{p} \times \frac{1}{u} = \frac{s}{p} \times \frac{1}{u} = \frac{p}{s} \div \frac{1}{u}$  (بند ١٥٧) وهو المطلوب

$$(مثال ١) \text{ لاختزال } \frac{16-14}{18+112} \times \frac{12+112}{114} \quad \text{تقول إن}$$

$$\frac{(2-12)12}{(3+12)6} \times \frac{(3+12)1}{114} = \frac{16-14}{18+112} \times \frac{12+112}{114}$$

$$\frac{2-12}{112} =$$

وذلك بحذف العوامل المشتركة في البسط والمقام

$$(مثال ٢) \text{ لاختصار } \frac{1+2}{112+2} \div \frac{1-2}{114-2} \times \frac{12-2-2}{11-2} =$$

تقول إن هذا المقدار

$$\frac{12+2}{1+2} \times \frac{1-2}{114-2} \times \frac{12-2-2}{11-2} =$$

$$1 = \frac{(12+2)1}{1+2} \times \frac{1-2}{(12-2)(12+2)} \times \frac{(1+2)(12-2)}{(1-2)1} =$$

لأن جميع العوامل مشتركة في البسط والمقام فيمحو بعضها بعضاً

(تمارين ١٩ >)

اختصر

$$\begin{aligned}
 & \frac{12 + \sqrt{7} + \sqrt{2}}{6 + \sqrt{5} + \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{9} + \sqrt{2}} \quad (٨) & \frac{1 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \div \frac{14 - \sqrt{7}}{24 + \sqrt{2} + 12} \quad (١) \\
 & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{9} + \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{5} + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \quad (٩) & \frac{2 + 1}{1 + 12} \div \frac{12 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad (٢) \\
 & \frac{5 + \sqrt{11} + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \div \frac{15 + \sqrt{12} + \sqrt{2}}{9 - \sqrt{2}} \quad (١٠) & \frac{12}{12 - \sqrt{2}} \times \frac{74 - \sqrt{2}}{72 + \sqrt{2}} \quad (٣) \\
 & \frac{45 - \sqrt{12} - \sqrt{2}}{27 - \sqrt{6} - \sqrt{2}} \div \frac{15 - \sqrt{14} - \sqrt{2}}{45 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (١١) & \frac{11 + 1}{2 + 1} \div \frac{121 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \quad (٤) \\
 & \frac{14 - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{49 - \sqrt{16}} \times \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{5} + \sqrt{2}} \quad (١٢) & \frac{2 - \sqrt{2}}{12 - \sqrt{2}} \times \frac{79 - \sqrt{16}}{2 - \sqrt{2}} \quad (٥) \\
 & \frac{25 - \sqrt{2}}{15 + 11 - \sqrt{2}} \times \frac{17 - \sqrt{2}}{15 + \sqrt{2}} \quad (١٣) & \frac{(2 + 12) \sqrt{2}}{1 + 15} \times \frac{25 - \sqrt{2}}{24 - \sqrt{2} + 79} \quad (٦) \\
 & \frac{\sqrt{2} + 216 + \sqrt{2}}{42 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{2} + 276 - \sqrt{2}}{49 - \sqrt{2}} \quad (١٤) & \frac{2 - \sqrt{2}}{9 - \sqrt{2}} \times \frac{6 + \sqrt{5} + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad (٧) \\
 & \frac{2 - \sqrt{2}}{72 + \sqrt{2}} \div \frac{72 - \sqrt{2}}{72 + 128} \times \frac{72 - \sqrt{2} + 72}{2 - \sqrt{2}} \quad (١٥) \\
 & \frac{1 + \sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}} \div \frac{2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{8 - \sqrt{2} + \sqrt{2}} \times \frac{20 - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{25 - \sqrt{2}} \quad (١٦) \\
 & \frac{5 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{7 - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{56 + \sqrt{10} - \sqrt{2}} \times \frac{80 + \sqrt{18} - \sqrt{2}}{50 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (١٧) \\
 & \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{8 + \sqrt{9} - \sqrt{2}} \div \frac{25 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{9 - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{72 + \sqrt{17} - \sqrt{2}} \quad (١٨) \\
 & \frac{14 - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{14 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \div \frac{2 - \sqrt{2}}{7 - \sqrt{2}} \times \frac{24 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{14 - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{14 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (١٩) \\
 & \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \times \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{15 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \right) \div \frac{4 + \sqrt{5} + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{20 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (٢٠) \\
 & \frac{1 - \sqrt{2}}{25 + \sqrt{20} - \sqrt{2}} \times \frac{7 - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{21 + \sqrt{17} - \sqrt{2}} \times \frac{15 + \sqrt{16} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad (٢١) \\
 & \frac{4 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} \div \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \times \frac{8 - \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (٢٢) \\
 & \frac{2 - \sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2} - 1} \times \frac{1}{2 - \sqrt{2} + 1} \times \frac{2 - \sqrt{2} + 1}{2 - 1 + 1} \quad (٢٣) \\
 & \frac{2 - \sqrt{2} + 212 - \sqrt{2}}{7 - \sqrt{2} + 222 - \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2} + 12 + \sqrt{2}}{222 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (٢٤) \\
 & \frac{22 + \sqrt{16} - \sqrt{2}}{17 + \sqrt{2} + \sqrt{2}} \div \frac{22 - \sqrt{2} + 12 + \sqrt{2}}{22 - \sqrt{2}} \times \frac{22 - \sqrt{2}}{128 + \sqrt{24} + \sqrt{2}} \quad (٢٥)
 \end{aligned}$$



(تمارين ١٢٠)

أوجد المضاعف المشترك البسيط لكل من المقادير الآتية

- (١)  $٦س + ٢س$
- (٢)  $٦س - ٢س$
- (٣)  $٣س + ٤س + ٨س$
- (٤)  $٢١س + ٧س (س + ١)$
- (٥)  $٦س - ١س$
- (٦)  $٦س + ١٦س + ٦س$
- (٧)  $٤س - ٢س$
- (٨)  $٦س - ٢س$
- (٩)  $٢س + ٢س + ٦س$
- (١٠)  $٢س - ٢س + ٦س$
- (١١)  $٤س + ٤س + ٦س$
- (١٢)  $٥س - ٤س + ٦س$
- (١٣)  $٦س - ٢س + ٦س$
- (١٤)  $٢٠س - ٦س - ١٠س$
- (١٥)  $٤٢س - ٦س - ١١س$
- (١٦)  $٢س + ٣س + ١س + ٦س + ٥س + ٢س$
- (١٧)  $٣س + ١١س + ٦س + ٨س + ٤س + ٥س$
- (١٨)  $٥س + ١١س + ٢س + ٥س + ١٦س + ٣س$
- (١٩)  $٢س - ٣س + ٢س + ١٥س - ٨س + ١٠س$
- (٢٠)  $٣س - ١٤س - ٣س + ١٣س + ١٤س - ٤س$
- (٢١)  $١٢س + ٣س - ٤٢س + ١٢س + ٣٠س + ١٢س$
- (٢٢)  $٣س + ٢٦س + ٣٥س + ٦س + ٣٨س - ٢٨س$
- (٢٣)  $٦٠س + ٥س - ٥س + ٦٠س + ٣٢س - ٤س + ٤٠س$
- (٢٤)  $٨س - ٣٨س + ٣٥س + ٦س - ٤س - ٢س$
- (٢٥)  $١٢س - ٢٣س + ١٠س - ٤س - ٩س + ٥س$
- (٢٦)  $٦س + ٧س - ٣س + ٣٦س + ١٤س - ١٥س$
- (٢٧)  $٤س + ١١س - ١٣س + ٣س + ٧س$
- (٢٨)  $٣س - ٦س - ٧س - ٥س + ٤س + ٢س$
- (٢٩)  $١٤س (١ - ٢) + ٢١س (١ - ٢) + ٦س (١ - ٢)$
- (٣٠)  $٢س + ٢س + ٢س + ٢س + ٢س + ٢س$
- (٣١)  $٣س - ٣س + ٤س - ٤س + ٦س - ٦س$

(مثال) لايحاد المضاعف المشترك البسيط للقارين

$$\begin{aligned} 22 + \sqrt{2} - \sqrt{2} 20 - \sqrt{2} + \sqrt{2} 2 \\ 10 + \sqrt{2} - \sqrt{2} 12 - \sqrt{2} 2 + \sqrt{2} 2 \end{aligned}$$

$(8 - 3 - 2)(3 - 2 - 2) = 24 + 37 - 20 - 3 + 2$   
 $(5 - 2 - 2)(3 - 2 - 2) = 15 + 37 - 13 - 3 + 6$

المضاعف المطلوب إذن

$$(0 - \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}) (\lambda - \sqrt{2} \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}) (\mu - \sqrt{2} \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2})$$

بند ١٦١ - للبرهنة على قاعدة استخراج المضاعف المشترك البسيط لمقدارين جبريين مركبين نقول لنفرض أن المقدارين  $a$  و  $b$  وطولهما المشترك الأعلى  $h$  وأن  $a = b$  خارجا بقسمة  $a$  على  $h$   $b$  على  $h$  على الترتيب فلي ذلك  $a = b$   $b = b$  وبما أن  $a$  و  $b$  ليس لهما عامل مشترك فمن الواضح أن المضاعف المشترك البسيط للمقدارين  $a$  و  $b$  هو  $a$  و  $b$

بند ١٦٣ - بين العامل المشترك الأعلى لمقدارين جبريين ومضاعفهما المشترك البسيط ارتباط مهم يلزم الالتفات اليه

نفرض أن ه العامل المشترك الأعلى للمدارين  $a^6 b^6$  أن س مضاعفهما المشترك البسيط

فتبناه على ما جاء بالبند المتقدم نرى أن

$$C = C_0 e^{-\lambda t} = 1$$

6 مه = 6 ح

إذن حاصل الضرب  $10 = 2 \times 5$  هـ

$$A \cup I \times A =$$

(1) ...

فيكون حاصل ضرب أي مقدارين جبريين يساوي حاصل ضرب عاملها المشترك الأعلى في مضاعفهما المشترك البسيط

ويُنتج أيضا من (١) أن  $1 \times \frac{1}{b} = b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$  سه

· أى أنه يمكن إيجاد المضاعف المشترك البسيط للمقيارين بقسمة حاصل ضربهما على عاملهما المشترك الأعلى أو بقسمة أحدهما على عاملهما المشترك الأعلى وضرب خارج القسمة في المقدار الآخر

بند ١٦٣ - يمكن استخراج المضاعف المشترك البسيط لثلاثة مقادير مثل  $٦٦٦$  و  $٦٦٦$  و  $٦٦٦$  كما يأتي (أولاً) يستخرج المضاعف المشترك البسيط للقادرين  $٦٦٦$  و  $٦٦٦$  ولكن سره ثم المضاعف المشترك البسيط للقادرين سره  $٦٦٦$  ولكن ي فيكون ي المضاعف المشترك البسيط المطلوب  
البرهان : لكون ي المقدار الأصغر درجة القابل للقسمة على كل من الكيتين سره  $٦٦٦$  والكية سره المقدار الأصغر درجة القابل للقسمة على  $٦٦٦$  يكون ي المقدار الأصغر درجة القابل للقسمة على  $٦٦٦$  و  $٦٦٦$  و  $٦٦٦$

## (تمارين ٢٠ ب)

- (١) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقادرين  
سره - سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$
- (٢) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادرين  
أب (سره + سره)  $٦٦٦$  أب (سره - سره)  $٦٦٦$  + سره (سره - سره)  $٦٦٦$
- (٣) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادرين  
سره سره - سره سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$
- (٤) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقادرين  
سره سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$
- (٥) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادرين  
١ - سره  $٦٦٦$  (١ - سره)  $٦٦٦$  (١ + سره)  $٦٦٦$
- (٦) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادرين  
سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$
- (٧) أوجد المضاعف المشترك البسيط والعامل المشترك الأعلى للقادرين  
سره سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$
- (٨) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادرين  
ب (سره - سره)  $٦٦٦$  ب (سره - سره)  $٦٦٦$  ب (سره - سره)  $٦٦٦$  ب (سره - سره)  $٦٦٦$
- (٩) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادرين  
سره سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$
- وأوجد أيضا العامل المشترك الأعلى للقادرين الثلاثة الأولى
- (١٠) أوجد العامل المشترك الأعلى للقادرين  
سره سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$  سره - سره  $٦٦٦$

ثم يتبين أيضا أن المضاعف المشترك البسيط لهذه المقادير هو خارج قسمة حاصل ضرب الثلاثة المقادير على مربع عاملها المشترك الأعلى

- (١١) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقدارين  
 $س^٢ + ١س + ٢$  و  $س^٢ + ٢س + ٦$  و  $س^٢ + ٤س + ٦$
- (١٢) أوجد المضاعف المشترك البسيط والعامل المشترك الأعلى للقادير  
 $س^٣ - ٢س^٢ + ٧س - ٥$  و  $س^٣ - ٢س^٢ + ٣س - ٢$  و  $س^٣ - ٢س^٢ + ٣س - ٢$
- (١٣) أوجد العامل المشترك الأعلى للقدارين  
 $س^٤ - ٣س^٣ + ١٠س^٢ + ٤س + ٢$  و  $س^٣ - ٣س^٢ + ٢س + ٦$  و  $س^٣ - ٢س^٢ - ٣س + ٢$
- (١٤) ما المضاعف المشترك البسيط للقادير  
 $س^٢ - ٦س + ٩$  و  $س^٢ - ٦س + ٩$  و  $س^٢ - ٦س + ٩$
- (١٥) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقدارين  
 $س^٢ - ٣س + ٢$  و  $س^٢ - ٣س + ٢$  و  $س^٢ - ٣س + ٢$
- (١٦) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقدارين  
 $س^٢ - ٩س + ١٤$  و  $س^٢ - ٩س + ١٤$  و  $س^٢ - ٩س + ١٤$
- (١٧) أوجد العامل المشترك الأعلى للقدارين  
 $س^٢ - ١٥س + ٤٨$  و  $س^٢ - ١٥س + ٤٨$  و  $س^٢ - ١٥س + ٤٨$
- (١٨) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادير  
 $س^٢ - ٢س + ١$  و  $س^٢ - ٢س + ١$  و  $س^٢ - ٢س + ١$

## الباب الحادى والعشرون - جمع الكسور وطرحها

بند ١٦٤ - أوصفا كيفية استخراج المضاعف المشترك البسيط لأى مقادير جبرية معلومة  
 ونبحث الآن فى كيفية جمع الكسور وطرحها

بند ١٦٥ - للبرهنة على أن

$$\frac{ا+ب}{س} = \frac{ا}{س} + \frac{ب}{س}$$

قول : معلوم أن

$$\frac{ا}{س} = \frac{ا}{س}$$

وأن

$$\frac{ب}{س} = \frac{ب}{س}$$

ففى كل من الحالتين تقسم الوحدة إلى أجزاء متساوية عددها ب و نأخذ منها أجزاء عددها ا و  
 ثم أجزاء عددها ب ا أى أننا نأخذ أجزاء عددها ا و ب من الأجزاء المتساوية التى عددها ب  
 والمنقسمة إليها الوحدة وهذا ما يعبر عنه بالكسر

$$\frac{ا+ب}{س} = \frac{ا}{س} + \frac{ب}{س}$$

وكذلك

$$\frac{ا-ب}{س} = \frac{ا}{س} - \frac{ب}{س}$$

بند ١٦٦ - جعلنا في المثال السابق ب د مقاما مشتركا لكل من الكسرين ولكن إذا كان للقدارين ب ٦ د عامل مشترك لا يكون ب د المضاعف المشترك البسيط لها وإذن لا يكون الكسر  $\frac{١٠+٣}{١٢}$  في أبسط صورة . ولأجل أن نتجنب استعمال كسور ليست في أبسط صورها نجد أنه من الضروري أن ندخل بعض التغيير على ما تقدم وقد يستحسن أخذ أبسط مقام مشترك وهو عبارة عن المضاعف المشترك البسيط للمقامات الكسور المعلومة

(قاعدة ١) لتحويل الكسور إلى كسور مساوية لها في القيمة بأبسط مقام مشترك نبحث عن المضاعف المشترك البسيط للمقامات ونجعله مقاما مشتركا ثم نقسمه على مقام الكسر الأول ونضرب الخارج في بسط ذلك الكسر وهكذا في بقية الكسور

(مثال) لتجتنس الكسرين الآتيين

$$\frac{١٤}{١٢} \quad ٦ \quad \frac{٣٥}{(١-٣)١٢}$$

نقول إن المقام المشترك البسيط ١٢  $(١-٣)$   $(١+٣)$  فنضرب إذن بسط الكسر الأول في ٣  $(١+٣)$  ونضرب بسط الثاني في ١٢ فيصير الكسران

$$\frac{١٠}{١٢} \quad ١٠ \quad \frac{١٠}{(١+٣)١٢}$$

بند ١٦٧ - نذكر الآن قاعدة جمع الكسور أو طرحها

(قاعدة ٢) لجمع الكسور أو طرحها نحول إلى كسور مساوية لها في القيمة بأبسط مقام مشترك ويستخرج حاصل الجمع الجبري للبسط ويقسم على المقام المشترك

$$(١ \text{ مثال}) \quad \frac{١٤-٣٥}{١٢} + \frac{١٠}{١٢}$$

نقول إن أبسط مقام مشترك ١٢

$$\frac{١٤-٣٥}{١٢} + \frac{١٠}{١٢} = \frac{١٤-٣٥+١٠}{١٢}$$

$$\frac{١١-٣١}{١٢} = \frac{١٤-٣٥+١٠}{١٢} =$$

$$(٢ \text{ مثال}) \quad \frac{١٢-٣٢}{١٢} - \frac{١-٣}{١٢} + \frac{٢-٣}{١٢}$$

نقول إن أبسط مقام مشترك ١٢

$$\frac{١٢-٣٢}{١٢} - \frac{١-٣}{١٢} + \frac{٢-٣}{١٢} = \frac{١٢-٣٢-١+٣+٢-٣}{١٢}$$

$$\frac{١٢-٣٢-١+٣+٢-٣}{١٢} =$$

= صفرا لأن حدود البسط محو بعضها بعضها

(ملاحظة) يحسن بالابتدئ أن يستعمل الأقواس كما في السطر الأول في حل المثال الأخير لأن ذلك يضمن صحة العمل





## (تمارين ٢١ ب)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

$\frac{\eta_2 + \frac{1}{\eta_4}}{\eta_4 - \frac{1}{\eta_2}} - \frac{1 + \frac{1}{\eta_2}}{\eta_2 - \frac{1}{\eta_4}} \quad (14)$	$\frac{1}{2 + \frac{1}{\eta}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta}} \quad (1)$
$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} - \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} \quad (15)$	$\frac{1}{4 + \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta}} \quad (2)$
$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} - \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} \quad (16)$	$\frac{1}{4 - \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{5 - \frac{1}{\eta}} \quad (3)$
$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} - \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} \quad (17)$	$\frac{1}{2 + \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{6 - \frac{1}{\eta}} \quad (4)$
$\frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} + \frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}} \quad (18)$	$\frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{\eta}} \quad (5)$
$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} + \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} \quad (19)$	$\frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta}} \quad (6)$
$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} + \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} \quad (20)$	$\frac{1 + \frac{1}{\eta}}{2 + \frac{1}{\eta}} - \frac{2 + \frac{1}{\eta}}{4 + \frac{1}{\eta}} \quad (7)$
$\frac{\eta_8 - \frac{1}{\eta_2}}{\eta_4 - \frac{1}{\eta_2}} - \frac{\eta_4 - \frac{1}{\eta_2}}{\eta_8 - \frac{1}{\eta_2}} \quad (21)$	$\frac{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} - \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}} \quad (8)$
$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} + \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} \quad (22)$	$\frac{2 - \frac{1}{\eta}}{2 + \frac{1}{\eta}} - \frac{2 + \frac{1}{\eta}}{2 - \frac{1}{\eta}} \quad (9)$
$\frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}} \quad (23)$	$\frac{4 - \frac{1}{\eta}}{5 - \frac{1}{\eta}} - \frac{4 - \frac{1}{\eta}}{2 - \frac{1}{\eta}} \quad (10)$
$\frac{2 - \frac{1}{\eta}}{4 + \frac{1}{\eta}} - \frac{4 + \frac{1}{\eta}}{2 + \frac{1}{\eta}} \quad (24)$	$\frac{1}{\eta - \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta}} \quad (11)$
$\frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}} + \frac{3}{4 - \frac{1}{\eta}} \quad (25)$	$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{9 - \frac{1}{\eta}} + \frac{3}{2 - \frac{1}{\eta}} \quad (12)$
$\frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}} \quad (26)$	$\frac{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}}{9 - \frac{1}{\eta}} - \frac{1}{2 - \frac{1}{\eta}} \quad (13)$

بند ١٦٨ - من المفيد أحيانا إدخال بعض التعديل على القواعد العامة المتقدمة وسنورد في الأمثلة الآتية أضع الوسائل الموصلة لذلك مع ملاحظة أنه لا يمكن وضع قواعد عامة يمكن تطبيقها في جميع الأحوال

(مثال ١) لاختصار  $\frac{8}{16-24} - \frac{4+1}{3-} - \frac{3+1}{4-1}$

نأخذ الكسرين الأول والثاني معا فنرى أن

$$\frac{8}{16-24} - \frac{(16-\eta) - 9 - \eta}{(3-1)(4-1)} =$$

$$\frac{8}{(4-1)(4+1)} - \frac{\eta}{(3-1)(4-1)} =$$

$$\frac{(3-1)8 - (4+1)\eta}{(3-1)(4-1)(4+1)} =$$

$$\frac{1-5\eta}{(3-1)(4-1)(4+1)} =$$

$$(مثال ٢) \text{ لاختصار } \frac{1}{1+س+س^٢} + \frac{1}{1-س+س^٢}$$

$$\text{نقول إن هذا المقدار} = \frac{1}{(1+س)(1+س^٢)} + \frac{1}{(1-س)(1+س^٢)}$$

$$= \frac{1-س+١+س^٢}{(1+س^٢)(1+س)(1-س)} =$$

$$= \frac{س^٠}{(1+س^٢)(1+س)(1-س)}$$

$$(مثال ٣) \text{ لاختصار } \frac{س^٤}{س^٤+٤} - \frac{س^٢}{س^٢+٦} - \frac{١}{س+١} - \frac{١}{س-١}$$

نقول إنه من الواضح أن المضاعف المشترك البسيط للقامين الأول والثاني ١ - س<sup>٢</sup> وهذا إذا ضرب في ٢ + س<sup>٢</sup> أنتج ٤ - س<sup>٤</sup> وهو المضاعف البسيط لثلاثة المقامات الأولى . وهذا الأخير إذا ضرب في ٤ + س<sup>٤</sup> أنتج ٦ - س<sup>٨</sup> وهو المضاعف المشترك البسيط لاربعة المقامات وإذا نحن أجرى العمل هكذا

$$\text{المقدار} = \frac{١+س-(س-١)}{س-٦} - \dots - \dots$$

$$= \frac{س^٢}{س^٢+٦} - \frac{س^٢}{س^٢+٦} - \dots - \dots$$

$$= \frac{س^٨}{س^٨-٨} = \frac{س^٤}{س^٤+٤} - \frac{س^٤}{س^٤-٤}$$

(تمارين ٢١ >)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

$$(١) \frac{س^٢}{س^٢-س} + \frac{١}{س-س} - \frac{١}{س+س}$$

$$(٢) \frac{س^٣}{س^٣-س^٤} - \frac{١}{س-س} + \frac{١}{س+س}$$

$$(٣) \frac{س^{١٢-٤}}{س^{٤-١}} - \frac{س^٣}{س^٢-١} - \frac{٠}{س^٢+١}$$

$$(٤) \frac{س^٨}{س^٩-٦^٤} - \frac{س^٣}{س^٣-١٢} + \frac{١٢}{س^٣+١٢}$$

$$(٥) \frac{١}{١-٢} - \frac{٢}{١+٢} - \frac{١}{٦-٩}$$

$$(٦) \frac{١}{(١+س)^٣} + \frac{١}{(١-س)^٢} - \frac{س^٠}{(١-س^٢)^٦}$$

$$(٧) \frac{س}{س-٦} - \frac{١}{(س+١)^٢} - \frac{١}{(س-١)^٢}$$

$$(٨) \frac{(٢+١٢)^٤}{(٩-٦^٤)^٣} - \frac{٠}{٩+١٦} - \frac{١٢}{٢-١٢}$$

$$\frac{5}{4-x} + \frac{2}{6+x} + \frac{3}{2-x} \quad (9)$$

$$\frac{3}{2-x} + \frac{3}{2-x} - \frac{3}{2-x} \quad (10)$$

$$\frac{1}{20+x-11-x} + \frac{1}{20+x-9-x} \quad (11)$$

$$\frac{1}{6+x-5-x} - \frac{1}{12+x-7-x} \quad (12)$$

$$\frac{1}{2-x+2-x} - \frac{1}{1-x-2-x} \quad (13)$$

$$\frac{2}{2-x-2-x} - \frac{1}{1-x-2-x} \quad (14)$$

$$\frac{2}{10-1-x} - \frac{2}{12-1-x} \quad (15)$$

$$\frac{2}{2+x+2+x} - \frac{0}{18-x+0+x} \quad (16)$$

$$\frac{1}{(2+x)(2+x)(1+x)} + \frac{1}{(2+x)(1+x)} - \frac{1}{1+x} \quad (17)$$

$$\frac{(2+x)9}{(2-x)(1+x)16} - \frac{(1-x)10}{(2-x)(2-x)16} - \frac{5}{(2-x)(1+x)2} \quad (18)$$

$$\frac{u+1}{(u+1)(u+1)4} - \frac{u+1}{(u+1)(u+1)} + \frac{u+1}{(u+1)(u+1)4} \quad (19)$$

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{2-x-2-x} + \frac{2}{2+x-2-x} \quad (20)$$

$$\frac{12}{11+x+10+x} - \frac{10}{14+x+9+x} + \frac{5}{6+x+0+x} \quad (21)$$

$$\frac{2+x-4}{1+x+2+x} + \frac{4}{1+x+2} + \frac{2}{1-x} \quad (22)$$

$$\frac{(1+x)12}{(2+x+8+x)11} - \frac{7}{2-x-7+x} + \frac{(2-x)0}{(1-x+2+x)11} \quad (23)$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2-x}{2+x} - \frac{2-x}{2+x} \quad (24)$$

$$\frac{0}{16-x} - \frac{4+x}{2+x} - \frac{2-x}{4-x} \quad (25)$$

$$\frac{18}{2(12-1)} - \frac{12-1}{12+1} - \frac{12+1}{12-1} \quad (26)$$

$$\frac{2-2}{2+2} + \frac{2+2}{2-2} - \frac{24}{4+x+12-9} \quad (27)$$

$$\frac{2}{2+9} - \frac{1}{2+2} - \frac{1}{2-2} \quad (28)$$

$$\frac{14}{9+14} - \frac{1}{2-12} + \frac{1}{2+12} \quad (29)$$

$$(٣٠) \quad \frac{1}{(س-١)٢} + \frac{1}{(س-١)٤} + \frac{1}{(س+١)٤}$$

$$(٣١) \quad \frac{1}{(س-١)٤} - \frac{1}{(س+١)٨} + \frac{٢}{(س-١)٨}$$

$$(٣٢) \quad \frac{1}{س+٢} - \frac{1}{س-٢} + \frac{٢}{س٢+٤}$$

$$(٣٣) \quad \frac{س}{س٢+٨+٢} - \frac{٥}{س٢+٦+٢} - \frac{٥}{س٢+٦-٢}$$

$$(٣٤) \quad \frac{1}{س٨+١٢} + \frac{1}{س٤٨+٩٢} - \frac{1}{س٨-١٢}$$

$$(٣٥) \quad \frac{1}{٢٧-٩٢} - \frac{1}{٩-١٢} + \frac{1}{٥٤+٩٦}$$

$$(٣٦) \quad \frac{س}{س٢+٢} - \frac{س}{س٢+٤} + \frac{1}{س٨+٨} - \frac{1}{س٨-٨}$$

$$(٣٧) \quad \frac{١٨}{٨١+٤} + \frac{1}{٩+٩} - \frac{1}{١٨+١٦} - \frac{1}{١٨-١٦}$$

$$(٣٨) \quad \frac{1}{س-٤} - \frac{س-١}{س٢+٤س+٢} + \frac{س+١}{س٢-٤س+٢}$$

$$(٣٩) \quad \frac{٢}{س٢+١٠س+٢} - \frac{1}{س٢+٤س+٢} + \frac{1}{س٢-٤س+٢}$$

$$(٤٠) \quad \frac{1}{س(١+س)} - \frac{٢-س}{١-س} - \frac{٢}{١+س} + \frac{1}{١-س}$$

$$(٤١) \quad \left( \frac{س+١}{س-٢} \right) + \frac{١٢}{س} - \frac{٤}{س-٢} - \frac{س٥٢-١٠٨}{س(س-٢)}$$

$$(٤٢) \quad \frac{1}{٢} + \frac{س(١+س)}{س١-٩-س+١} + \frac{س+١}{(١-س)٢} - \frac{٢(١+س)}{(١-س)(١+س)}$$

$$(٤٣) \quad \frac{س٨}{س٢-٤} - \frac{(٢-س-س٢)٢}{س٢+٢-٢} - \frac{(٢-س+س٢)٢}{س٢-٢-٢}$$

بند ١٦٩ - قد اعتبرنا البسط والمقام فيا سبق أنهما عددا صحیحان موجبان وأضحنا بالبند ١٥٥ أن الكسر خارج قسمة البسط على المقام ويكون القسمة في الجبر لا تنقيد بالكيات الصحيحة الموجبة ستأتى بتعريف أعم للكسر على الصورة الآتية

الكسر الجبرى  $\frac{1}{ب}$  خارج قسمة الكية ١ على الكية ب مهما كانت قيمة كل منها

بند ١٧٠ - علمنا بما جاء بالبند السابق أن  $\frac{1}{ب}$  خارج قسمة ١ على ب وهذا يأتى من قسمة ١ على ب ووضع علامة + أمام الخارج على مقتضى قاعدة العلامات

وكذا  $\frac{1}{ب}$  خارج قسمة -١ على ب وهذا يأتى من قسمة ١ على ب مع وضع - أمام الخارج القسمة على حسب قاعدة العلامات

إذن  $\frac{1}{ب} - \frac{1}{ب} = ٠$  ..... (٢)

وأیضا  $\frac{1}{ب}$  خارج قسمة ١ على - ب وهو یأتى من قسمة ١ على ب مع وضع علامة - أمام الخارج القسمة على حسب قاعدة العلامات

اذن  $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \dots \dots \dots (٣)$

وقد يمكننا أن نمر عن هذه النتائج بالقواعد الآتية

(أولاً) إذا غيرت علامة كل من بسط الكسر ومقامه لا تتغير علامة الكسر

(ثانياً) إذا غيرت علامة البسط أو المقام فقط تتغير علامة الكسر بأعكس

ولما كان هاتين القاعدةين فائدة عظمى في بعض أمثلة الاختزال فسنعيدهما بصورة أخرى قد تكون

أسهل في تطبيقها أحياناً من الصورة المتقدمة

(أولاً) يمكننا تغيير علامة كل حد في بسط الكسر ومقامه بدون أن نحدث تغييراً ما في قيمة الكسر

(ثانياً) يمكننا تغيير علامة الكسر بتغيير علامة كل حد من حدود بسطه فقط أو تغيير علامة كل

حد من حدود مقامه فقط

$$\frac{1-2}{3-4} = \frac{1+2}{3+4} = \frac{1-2}{3-4} \quad (\text{مثال ١})$$

$$\frac{1-2}{3-4} = \frac{1+2}{3+4} = \frac{1-2}{3-4} \quad (\text{مثال ٢})$$

$$\frac{1-2}{3-4} = \frac{1+2}{3+4} = \frac{1-2}{3-4} \quad (\text{مثال ٣})$$

يمكننا غالباً إهمال الخطوة الوسطى في العملية

$$(\text{مثال ٤}) \text{ لاختصار } \frac{1}{1+2} + \frac{2}{1-2} + \frac{3}{1-2}$$

نقول إنه من الواضح أن المضاعف المشترك البسيط لمقامي الكسرين الأول والثاني  $1-2$

فيحسن إذن تغيير علامة مقام الكسر الثالث

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+2} - \frac{2}{1-2} + \frac{3}{1-2} = \text{وعليه يكون المقدار} \\ & = \frac{1(1-2) - 2(1+2) + 3(1-2)}{(1+2)(1-2)} \\ & = \frac{1-2-2-4+3-6}{1-4} = \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1-2}{1-2} + \frac{3}{1-2} \quad (\text{مثال ٥}) \text{ لاختصار}$$

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1-2}{1-2} - \frac{3}{1-2} = \text{نقول إن المقدار}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1(1-2) + (1-2) - 3(1-2)}{(1+2)(1-2)} \\ & = \frac{1-2+1-2-3+6}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{1-2}{1-2} = 1$$

(تمارين ٢١ د)

اختصر كلا من المقادير الآتية

$$(١) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-4}$$

$$(٢) \quad \frac{10}{1-x} - \frac{2}{1-x} - \frac{3}{1+x}$$

$$(٣) \quad \frac{12}{1-x} - \frac{(x+4-x)^2}{x-x} + \frac{12-x}{1+x}$$

$$(٤) \quad \frac{1+x}{1-x} + \frac{x+12+x}{x-x} + \frac{1-x}{1+x}$$

$$(٥) \quad \frac{x-4}{x-1} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$(٦) \quad \frac{2}{1+x} - \frac{2}{1-x} - \frac{x^2}{x-1}$$

$$(٧) \quad \frac{(11-x)^2}{9-x} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{x^2-5-x}{x+2}$$

$$(٨) \quad \frac{12}{9-x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{x^2-2}{x+2}$$

$$(٩) \quad \frac{11}{x-1} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2}$$

$$(١٠) \quad \frac{1}{x-12} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

$$(١١) \quad \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^2}{x^2-x}$$

$$(١٢) \quad \frac{x^2-x}{x^2-x} - \frac{x^2-x}{x^2-x}$$

$$(١٣) \quad \frac{x}{x-x} + \frac{x}{x+x} + \frac{x^2}{x^2-x}$$

$$(١٤) \quad \frac{x+2-x}{x-2} - \frac{x+2+x}{x+2}$$

$$(١٥) \quad \frac{1}{x-12} + \frac{12}{x-12} + \frac{1}{x+12}$$

$$(١٦) \quad \frac{12-x}{x+x} + \frac{(x-1)^2}{x-x} - \frac{1-x^2}{x-x}$$

$$(١٧) \quad \frac{x-1}{1+x} - \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{x+1}{1-x^2}$$

$$(١٨) \quad \frac{x+1}{(x-1)(1-x)} + \frac{x+1}{(1-x)(x-1)}$$

$$(١٩) \quad \frac{x-1}{(x-1)(1-x)} - \frac{x-1}{(1-x)(x-1)}$$

$$(٢٠) \quad \frac{1-x+x}{(x-1)(1-x)} - \frac{x+x+1}{(1-x)(x-1)} + \frac{x+12}{(x-1)(1-x)}$$

$$(21) \quad \frac{1}{(7+8)(9+8)} - \frac{1}{(7+8)(9-8)} + \frac{1}{(8+8)(8-7)} - \frac{1}{(8+8)(8-9)}$$

$$(22) \quad \frac{1}{7+8} - \frac{1}{8-7} + \frac{1}{7-8} + \frac{1}{8+7}$$

$$(23) \quad \frac{1}{12-8} + \frac{1}{8-1} + \frac{1}{12+8} - \frac{1}{1+8}$$

$$(24) \quad \frac{9}{8-12} - \frac{1}{(8+12)212} + \frac{1}{(1-8)214} - \frac{1}{(1+8)214}$$

$$(25) \quad \frac{صه}{(8+صه)(صه+8)} + \frac{صه}{صه-8} + \frac{صه}{صه+8} - \frac{صه}{صه-8}$$

$$(26) \quad \frac{1}{8-1} - \frac{1}{(8-1)1} + \frac{1}{(8+1)1} + \frac{1}{(8-1)1}$$

$$(27) \quad \frac{8-8}{(8-8)2} - \frac{1}{(8+1)2} - \frac{1}{(8-8)2} - \frac{1}{(8-8)2}$$

$$(28) \quad \frac{1}{8+1} + \frac{1}{8-1} - \frac{1}{1-8} - \frac{1}{1+8}$$

$$(29) \quad \frac{2}{(1-8)4} - \frac{1}{(8+1)4} - \frac{1}{(8+1)8} + \frac{2}{(8-1)8}$$

$$(30) \quad \frac{2}{(1-8)8} + \frac{1}{8-1} + \frac{1}{1+8} + \frac{1}{1-8} + \frac{1}{8+1}$$

$$(31) \quad \frac{2}{8+1} - \frac{2}{8-1} + \frac{2}{8+1} - \frac{2}{8-1}$$

$$(32) \quad \frac{2}{8-1} - \frac{2}{8+1} + \frac{2}{8-1} + \frac{2}{8+1} - \frac{2}{8-1} + \frac{2}{8+1}$$

بند ١٧١ - إذا أريد اختصار المقدار

$$\frac{1}{(1-8)(1-8)} + \frac{1}{(1-8)(8-1)} + \frac{1}{(8-1)(8-1)}$$

يلاحظ في البحث عن المضاعف المشترك البسيط للمقامات أن العوامل المركبة المراد إيجاد مضاعفها المشترك في الحقيقة ثلاثة لا ستة وذلك لأن ثلاثة منها متحدة في الصورة ومختلفة في العلامات فقط

$$\begin{aligned} (1-8) - &= (8-1) \\ (1-8) - &= (1-8) \\ (8-1) - &= (8-1) \end{aligned}$$

وإذا وضع بدل العامل الثاني في كل مقام ما يساويه يمكننا أن نكتب المقدار على الوجه الآتي

$$(1) \quad \frac{1}{(8-1)(1-8)} - \frac{1}{(1-8)(8-1)} - \frac{1}{(1-8)(8-1)}$$

ولما كان المضاعف المشترك البسيط لهذه المقامات  $(8-1)(1-8)$

$$\frac{(8-1)-(1-8)-(8-1)}{(8-1)(1-8)} =$$

$$\frac{8-1-1+8-8+1}{(8-1)(1-8)} =$$

$$= \text{صفر}$$



بند ١٧٢ - هناك خاصة في ترتيب الحروف في المثال السابق جديرة بالانفات وذلك لأن الحروف في المقدار (١) موضوعة بترتيب يسمى الترتيب الدائري أى أن ب تتبع ا كما أن ا



تتبع ج وكذا ج تتبع ب فلو كتبنا ثلاثة الحروف ا ب ج على محيط دائرة كما مبين على اليسار في الشكل وبدأنا بأى حرف منها وتبعنا اتجاه السهم نجد أن الحرفين الآخرين يتبعانه على ترتيب دائري هكذا ا ب ج ب ا ج ا ب ومراعاة هذه القاعدة ضرورية جدا في حل كثير من المسائل التي تشتمل على ثلاثة حروف مطروح بعضها من بعض

فالمقادير ب - ج - ا - ب موضوعة على ترتيب دائري أما المقادير ب - ج - ا - ب - ج - ا - ب وكذلك المقادير ا - ب - ج - ا - ب - ج - ا - ب فترتيب الحروف فيها يخالف الترتيب الدائري وقد يجحد الطالب أنه يمكنه دائماً اختصار العمل وتسهيله باتباع الترتيب الدائري وفي وضع المقادير ومتى روى هذا الترتيب في ابتداء حل التمرين تلزم مراعاته حتى ينتهي الحل وسنقتصر في هذا الباب على السهل القليل من المسائل المتعلقة بهذا الموضوع على أن نمود إليه في الباب التاسع والعشرين

### (تمارين ٢١ هـ)

ما قيمة كل من المقادير الآتية

$$(١) \frac{ا}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ب}{(ا-ب)(ج-ب)} + \frac{ج}{(ا-ج)(ب-ج)}$$

$$(٢) \frac{ا}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ب}{(ا-ب)(ج-ب)} + \frac{ج}{(ا-ج)(ب-ج)}$$

$$(٣) \frac{صه}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{صه}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{ع}{(ج-صه)(ع-صه)}$$

$$(٤) \frac{صه+ع}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{صه+ع}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{ع+ج}{(ج-صه)(ع-صه)}$$

$$(٥) \frac{ا-ب}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ا-ج}{(ا-ب)(ج-ب)} + \frac{ب-ج}{(ا-ج)(ب-ج)}$$

$$(٦) \frac{ع+صه}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{صه+ع}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{صه+ع}{(ج-صه)(ع-صه)}$$

$$(٧) \frac{ا+ب}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ا+ج}{(ا-ب)(ج-ب)} + \frac{ب+ج}{(ا-ج)(ب-ج)}$$

$$(٨) \frac{ا-ب}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ا-ج}{(ا-ب)(ج-ب)} + \frac{ب-ج}{(ا-ج)(ب-ج)}$$

$$(٩) \frac{ا-ب+ج}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ا-ب+ج}{(ا-ب)(ج-ب)} + \frac{ب-ج+ا}{(ا-ج)(ب-ج)}$$

$$(١٠) \frac{ا-ب}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ا-ج}{(ا-ب)(ج-ب)} + \frac{ب-ج}{(ا-ج)(ب-ج)}$$

$$(١١) \frac{صه+ع}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{صه+ع}{(ع-صه)(ج-صه)} + \frac{ع+ج}{(ج-صه)(ع-صه)}$$

$$(١٢) \frac{ط+ق}{(ق-ط)(ج-ط)} + \frac{ط+ق}{(ق-ط)(ج-ط)} + \frac{ق+ج}{(ج-ط)(ق-ط)}$$



بند ١٧٩ - الأمثلة الآتية تبين كيفية اختزال الكسور المركبة

$$\left(\frac{a}{s} - \frac{1}{u}\right) \div \left(\frac{a}{s} + \frac{1}{u}\right) = \frac{\frac{a}{s} + \frac{1}{u}}{\frac{a}{s} - \frac{1}{u}} \quad (\text{مثال ١})$$

$$\frac{\frac{au - s}{su}}{\frac{au + s}{su}} =$$

$$\frac{s}{au - s} \times \frac{au + s}{su} =$$

$$\frac{au + s}{au - s} =$$

أو بالاختصار نقول

نضرب كسرى كل من البسط والمقام في  $s$  وهو المضاعف المشترك البسيط انما ماتا فيؤول الكسر إلى

$$\frac{au + s}{au - s} \quad \text{وهنا عين النتيجة السابقة}$$

$$\frac{\frac{u}{s} + s}{\frac{u}{s} - s}$$

(مثال ٢) لاختزال

نضرب كلا من البسط والمقام في  $s^2$  فيحدث أن

$$\frac{s^2 \left(\frac{u}{s} + s\right)}{s^2 \left(\frac{u}{s} - s\right)} = \frac{s^2 \frac{u}{s} + s^3}{s^2 \frac{u}{s} - s^3} =$$

الكسر

$$\frac{s^2}{s^2 - s^3} =$$

$$\frac{2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

(مثال ٣) لاختزال

$$\frac{112 - 72 + 18}{18 - 13 + 7} =$$

قول إن الكسر

$$\frac{(9 + 16 - 7)2}{(3 - 1)(6 + 1)} =$$

$$\frac{(2 - 1)2}{6 + 1} =$$

$$\frac{2 - 7}{2 + 7} - \frac{2 + 7}{2 - 7}$$

(مثال ٤) لاختزال

$$\frac{u - 1}{u + 1} - \frac{u + 1}{u - 1} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}(2 - 7) - \frac{1}{2}(2 + 7)}{(2 - 7)(2 + 7)} =$$

قول إن البسط

$$\frac{2 \cdot 9}{(2 - 7)(2 + 7)} =$$

$$\frac{18}{(2 - 7)(2 + 7)} =$$

وكذا المقام

$$\frac{24}{(b-1)(b+1)} \div \frac{24}{(b-1)(b+1)} = \text{فالكسر كله إذن}$$

$$\frac{24}{(b-1)(b+1)} \times \frac{24}{(b-1)(b+1)} =$$

$$\frac{24}{b+1} =$$

(ملاحظة) يحسن بالتأخير لزيادة ضبط العمل وحسن ترتيبه أن يختصر كلا من البسط والمقام على حدته كما فعلنا بالمثل السابق متى اشتمل كل من بسط الكسر ومقامه على كسور

بند ١٨٠ - باختصار الكسور المماثلة بالكسور المتسلسلة كالكسر الذي سنورده يلزم أن نبدا دائما باختصار أسفل كسر وهكذا نسير في العمل تدريجيا حتى يتم كما يأتي

$$\frac{24}{b+1} \quad \text{مثال لا اختزال}$$

$$\frac{1}{b+1} - 1 - b =$$

$$\frac{1}{b+1} - 1 - b =$$

$$\frac{24}{b+1} = \frac{24}{b+1} = \text{نقول إن الكسر}$$

$$\frac{1}{b+1} - 1 - b =$$

$$\frac{1}{b+1} - 1 - b =$$

$$\frac{24}{b+1} = \frac{24}{b+1} =$$

$$\frac{24}{b+1} = \frac{24}{b+1} =$$

$$(b+1) = \frac{24}{b+1} =$$

(تمارين ١٢٢)

ما قيمة كل من الكسور الآتية

$\frac{24}{b+1} + \frac{1}{b+1}$ (٦)	$\frac{1}{b+1} - \frac{1}{b+1}$ (١)
$\frac{24}{b+1} - 1$ (٧)	$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+1}$ (٢)
$\frac{24}{b+1} + 1$ (٨)	$\frac{1}{b+1} - \frac{1}{b+1}$ (٣)
$\frac{1}{b+1} + 1$ (٩)	$\frac{1}{b+1} + 1$ (٤)
$\frac{1}{b+1} - 1$ (١٠)	$\frac{1}{b+1} + 2$ (٥)

$$\frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} \quad (14)$$

$$\frac{2 - x - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \quad (15)$$

$$\left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) \div \frac{2}{x-1} \quad (16)$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}} \quad (11)$$

$$\frac{\frac{1}{x} - x}{\frac{1}{x} + 1} \quad (12)$$

$$\frac{\frac{1}{x} + 0 + x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1} \quad (13)$$

$$\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} \div \left( \frac{x+1}{x+1} - \frac{x-1}{x-1} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\frac{2}{x}}{\frac{2}{x-1}} \div \left( \frac{x+x+1}{x+1} - \frac{x+x-1}{x-1} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{2}{x}} \times \left( \frac{x}{x+1} - x \right) \left( \frac{x}{x-1} + x \right) \quad (19)$$

$$\left( \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x+1} \right) \div \left( \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} \right) \quad (20)$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{2}{x} + x} + x \quad (27)$$

$$\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} - x} - 1 \quad (28)$$

$$\frac{2-x}{1-\frac{x}{x+1}} - 2 - x \quad (29)$$

$$\frac{\frac{1}{1-x} + x}{\frac{1}{1-x} - x} - \frac{\frac{1}{1+x} - x}{\frac{1}{1+x} + x} \quad (30)$$

$$\frac{\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x+1}}{\frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x+1)}} - 1 \quad (31)$$

$$\frac{\frac{x-1}{x+1} + 1}{\frac{x-1}{x+1} - 1} \div \frac{\frac{x-1}{x+1} + 1}{\frac{x-1}{x+1} - 1} \quad (32)$$

$$\frac{\frac{x-1}{x-1}}{\frac{1}{x} - 1} - x - 1 \quad (33)$$

(12)

$$\frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}}{\frac{x+1}{x+1} - 1} \quad (21)$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}} \quad (22)$$

$$\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x} - 1} \quad (23)$$

$$\frac{\frac{2}{x-1}}{\frac{2}{x-1} + x + 1} + 1 \quad (24)$$

$$\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x} + 1} - 1 \quad (25)$$

$$\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x-1}{x-1} + 1} + x \quad (26)$$



نقسم البسط على المقام

$$\begin{array}{r} \text{سم} ٢ \\ \text{سم} ٢ + \text{سم} ٦ - \text{سم} ١٨ \\ \hline \text{سم} ٦ - \\ \text{سم} ١٨ - \text{سم} ٦ - \text{سم} ١٨ \\ \hline \text{سم} ١٨ \\ \text{سم} ١٨ + \text{سم} ٥٤ - \text{سم} ٥٤ \\ \hline \end{array}$$

ومن ذلك يضح أن المقدارين متساويان

يمكننا في هذا المثال أن نستمر في عملية القسمة ونوجد أى عدد نريد من الحدود في الخارج كما أنه يمكننا أن نقف عند أى حد ويجعل الباقي كمراسطه آخر باقى في القسمة ومقامه المقسوم عليه

وعلى ذلك إذا جعلنا عدد حدود خارج القسمة أربعة في المثال السابق رأينا أن

$$\frac{\text{سم} ٢}{\text{سم} ٢ + ١} = \frac{\text{سم} ٢ - \text{سم} ٦ + \text{سم} ١٨ - \text{سم} ٥٤ + \text{سم} ١٦٢}{\text{سم} ٢ + ١}$$

وقد يمكن أن تكون حدود الخارج كسورا فإذا قسمنا  $\text{سم} ٢$  مثلا على  $\text{سم} ٢ - \text{سم} ٦$  نجد أن الجداول

$$\frac{١٧}{\text{سم} ٢} = \frac{١}{\text{سم} ٢} + \frac{٦}{\text{سم} ٢} + \frac{٦}{\text{سم} ٢} + \frac{٦}{\text{سم} ٢} \text{ والباقي } \frac{١٧}{\text{سم} ٢}$$

بند ١٨٤ - قد تأتي أمثلة متنوعة في الضرب والقسمة يمكن حلها باستعمال الطرق المتقدمة في اختصار الكسور

$$\begin{aligned} & \text{(مثلا) لضرب سم} ١٢ + \text{سم} ٢ - ١ - \text{سم} ٢ \text{ في } \frac{\eta}{١٢ + \text{سم} ٢} - ١ - \text{سم} ٢ \\ & \text{نقول إن حاصل الضرب} = \left( \frac{\eta}{١٢ + \text{سم} ٢} - ١ - \text{سم} ٢ \right) \times \left( \frac{\eta}{١٢ + \text{سم} ٢} - ١ - \text{سم} ٢ \right) \\ & = \frac{\eta^2 - \eta - \text{سم} ١٢ + \text{سم} ٢}{١ + \text{سم} ٢} \times \frac{\eta - \eta^2 + \text{سم} ١٢ + \text{سم} ٢}{١٢ + \text{سم} ٢} = \\ & = \frac{\eta^2 - \text{سم} ١٢ + \text{سم} ٢}{١ + \text{سم} ٢} \times \frac{\eta + \text{سم} ١٢ + \text{سم} ٢}{١٢ + \text{سم} ٢} = \\ & = \frac{(١ - \text{سم} ٢)(١٢ + \text{سم} ٢)}{١ + \text{سم} ٢} \times \frac{(١ + \text{سم} ٢)(١٥ + \text{سم} ٢)}{١٢ + \text{سم} ٢} = \\ & = (١ - \text{سم} ٢)(١٥ + \text{سم} ٢) \end{aligned}$$

### (تمارين ٢٢ ب)

اكتب كلا من الكسور الآتية على صورة عدد كسور بسيطة مختلة

$\frac{٥ + ١ + ١}{٥١} \quad (٤)$	$\frac{\text{سم} ٢ + \text{سم} ٢ + \text{سم} ٢ - \text{سم} ٢}{\text{سم} ٩} \quad (١)$
$\frac{٥ + ١ + ٥ + ٥}{٥١} \quad (٥)$	$\frac{\text{سم} ١٦ + \text{سم} ١٤ - \text{سم} ١٢}{\text{سم} ١٢} \quad (٢)$
$\frac{٥ + ١٢ + ٥ + ١٢ - ٥ + ١}{٥١} \quad (٦)$	$\frac{\text{سم} + \text{سم} ١٢ + ٥ + ١٢ - ١}{٢} \quad (٣)$

أجر عمليات القسمة الآتية وأوجد الباقي بعد إيجاد أربعة حدود في خارج القسمة

$$\begin{array}{l|l} (7) \text{ ص } \div (ص + 1) & (10) \div (ص + 1) \\ (8) \text{ ص } \div (ص - 1) & (11) \div (ص + 3) \\ (9) \text{ ص } \div (ص + 1) & (12) \div (ص - 1) \end{array}$$

$$(13) \text{ يتف أن } \frac{ص-٦}{ص-1} + ٥٢ + 1 = \frac{ص-٦}{ص-1}$$

$$(14) \text{ يتف أن } ص - ص - ص + ص = \frac{ص}{ص+ص} - \frac{ص}{ص+ص}$$

$$(15) \text{ يتف أن } ١٢ - ص - ٢٥ + \frac{٤٩}{ص+٢} = \frac{١٦ - ص - ١٧ + ص}{٢ - ص + ٩ + ص}$$

$$(16) \text{ يتف أن } \frac{(ص-٥+1)(ص+٥+1)}{٥١٢} = \frac{ص-٥+١}{٥١٢} + 1$$

$$(17) \text{ إقسم ص } + \frac{١٦ - ص}{١٦ - ص} + 1 - ص = \frac{١٢}{ص+٤}$$

$$(18) \text{ اضرب أ } ١٢ - ص + ٤ - \frac{ص}{ص+1} - ٣ = \frac{ص}{ص+1} - ٣$$

$$(19) \text{ إقسم ب } ٣ - ٢ - \frac{ص}{ص-٢} + ٣ = \frac{ص}{ص-٢} - ٦ + ٣$$

$$(20) \text{ إقسم ج } ٩ + ٢ + \frac{ص}{ص-٩} + ٣ = \frac{ص}{ص-٩} + ٣ + ١$$

$$(21) \text{ اضرب د } ٤ - ص + ١٤ + \frac{ص}{ص-٧} + \frac{١}{٦} = \frac{ص}{ص-٧} + \frac{١}{٦}$$

بند ١٨٥ - تشمل التمارين الآتية على أمثلة متنوعة على معظم القواعد المتعلقة بالكسور

### (تمارين ٢٢ ع)

اختصر كلا من المقادير الآتية

$$(1) \left[ \frac{ص+١٢+١}{ص+١٢+١} \times \frac{ص-١}{ص+١} \right] \div \frac{ص-١}{ص+١}$$

$$(2) \frac{ص(ص+1)(1+ص)}{1٦} - \frac{ص(ص+1)(1+ص)}{1٣}$$

$$(3) \frac{٢}{ص-٢+1+١} - \left( \frac{1}{ص+1} - \frac{1}{ص-1} \right) \div \frac{1}{ص}$$

$$(4) \left( \frac{ص-ص}{ص+ص} \right) - \left( \frac{ص+ص}{ص-ص} \right)$$

$$(5) \frac{ص}{1+ص-ص} - \frac{٢}{1+ص} + \frac{٢}{١-ص}$$

$$(6) \left( \frac{1+ص}{ص} \right) \div \left( \frac{ص}{ص-1} + \frac{ص}{ص-1} \right)$$

$$(7) \frac{ص}{ص+1} + \frac{٢}{ص+1} - \frac{1}{ص(1+ص)} - \frac{1}{ص}$$



$$\frac{x^2+1}{x^2+x^2+2x+1} \quad (٨)$$

$$\frac{27+x^2-9x^2}{162+x^2-81} \quad (٩)$$

$$\frac{x^2(1-\eta)}{x^2(1+\eta)} + \frac{x^2(1-\eta)}{x^2} - \frac{1}{\eta} \quad (١٠)$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1}\right) \div \frac{x^2\eta - x^2}{\eta + x^2} \times \left\{ \frac{x^2+1}{1-x^2} \div \frac{x^2-1}{\eta + x^2+1} \right\} \quad (١١)$$

$$\frac{(x^2+1)(\frac{x^2}{1}-1)}{x^2-\eta} \div \frac{x^2-\eta}{x^2+x^2+1+\eta} \quad (١٢)$$

$$\frac{1+x^2-2x^2}{8-x^2-10+x^2+10-x^2} \quad (١٣)$$

$$\frac{x^2+3x^2(1+1)+1+\eta}{x^2-4} \quad (١٤)$$

$$\frac{\frac{x}{1+1}}{\frac{1}{1+1}} - \frac{2}{2+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1} \quad (١٥)$$

$$\frac{1}{\frac{2}{x}-x} - \frac{1}{2-x^2} \times \frac{1}{x} + \frac{2+x}{1+x^2+2x^2} \quad (١٦)$$

$$\frac{2}{1-x^2+x^2-x^2} - \frac{2}{1+x^2+x^2+x^2} \quad (١٧)$$

$$\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) \frac{1}{2} \div \frac{\eta-1}{x(x+1)-x(x+1)} \quad (١٨)$$

$$\frac{1+x^2-2x^2-x^2}{2+x^2-2x^2} \quad (١٩)$$

$$\frac{8+x^2-6-x^2}{20+x^2-10+x^2+21-x^2} \quad (٢٠)$$

$$\frac{2}{12-x^2} + \frac{1-x^2}{\eta+1+x^2-10-x^2} - \frac{12}{\eta(12-x^2)} \quad (٢١)$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2+1}{x-1} \times \frac{1}{x} - \left(\frac{x^2+\eta}{x^2-\eta}\right) \frac{1}{2} \quad (٢٢)$$

$$\frac{1}{x^2+x^2} \div \frac{x^2-x^2}{x^2-x^2+x^2} \times \left(\frac{1}{x^2+x^2} - \frac{1}{x^2-x^2}\right) \frac{x^2}{2} \quad (٢٣)$$

$$\left[\frac{x^2-x^2}{x^2-x^2+x^2} \times \left(\frac{1}{x^2-x^2} + \frac{1}{x^2+x^2}\right) \frac{x^2}{2}\right] \div \frac{1}{x^2+x^2} \quad (٢٤)$$

$$\left(\frac{x}{x} - x\right) \div \left(\frac{2}{x} - 0 + x^2\right) \left(\frac{2}{x} - 0 - x^2\right) \quad (٢٥)$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right) \div \left\{ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} \right\} \quad (٢٦)$$

$$\frac{\frac{1}{x^2} - x^2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^2} \quad (٢٧)$$

$$\left(\frac{\eta-2}{\eta+2}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\alpha\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+\alpha\right) \quad (28)$$

$$\left(\frac{\alpha}{1}-\frac{1}{\alpha}\right) \div \left\{ \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}-1}{\frac{(\alpha-1)}{\alpha+1}-1} - \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha+1}-1} \right\} \quad (29)$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (30)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)^2}{1+\sqrt{2}} \quad (31)$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}} \times \frac{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}+1}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha+1}-1} \quad (32)$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}} \times \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \quad (33)$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}} - \frac{(\frac{2}{\sqrt{2}}-1)(\frac{2}{\sqrt{2}}-1)}{\frac{2}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{2}}-1)(\frac{2}{\sqrt{2}}+1)} \quad (34)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right) \div \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right\} \quad (35)$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1-2} \div \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2} \times \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}+1}{\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}} \div \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}+1}{\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}} \times \frac{1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}}{1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}} \quad (37)$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}-2}{1+\frac{2}{\sqrt{2}}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \div \frac{1-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{1+\frac{1-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}-2}} \quad (38)$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{2}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \quad (39)$$

$$\frac{2}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha-2} \quad (40)$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)^4} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^8} + \frac{2}{(\sqrt{2}-1)^8} + \frac{2}{(\sqrt{2}-1)^4} \quad (41)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \beta + \gamma} - \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \beta} - \frac{0}{(1 + \gamma)\alpha} + \frac{\gamma}{(\gamma - \alpha)\alpha} \quad (٤٢)$$

$$\frac{\gamma}{\frac{1}{\alpha} + \beta - \gamma} + \frac{\gamma}{\frac{1}{\alpha} + \beta + \gamma} - \left( \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \gamma} \right) \left( \frac{\gamma}{\frac{1}{\alpha} + \beta} + \frac{\gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma} \right) \quad (٤٣)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma + \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma - \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma} \quad (٤٤)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma + \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma - \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma} \quad (٤٥)$$

$$\frac{(\frac{1}{\alpha} - \gamma)(\frac{1}{\alpha} - \gamma) + (\frac{1}{\alpha} - \gamma)(\frac{1}{\alpha} - \gamma) + (\frac{1}{\alpha} - \gamma)(\frac{1}{\alpha} - \gamma)}{(\frac{1}{\alpha} - \gamma)(\frac{1}{\alpha} - \gamma) + (\frac{1}{\alpha} - \gamma)(\frac{1}{\alpha} - \gamma) + (\frac{1}{\alpha} - \gamma)(\frac{1}{\alpha} - \gamma)} \quad (٤٦)$$

$$\frac{\alpha - \beta - \gamma}{(\alpha - \beta)(1 - \gamma)} + \frac{\alpha - \beta - \gamma}{(1 - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\alpha - \beta - \gamma}{(\alpha - \gamma)(1 - \beta)} \quad (٤٧)$$

$$\frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)(1 - \gamma)} + \frac{\alpha + \beta}{(1 - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \gamma)(1 - \beta)} \quad (٤٨)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma + \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma - \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma} \quad (٤٩)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma + \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma - \beta} + \frac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{\frac{1}{\alpha} - \gamma} \quad (٥٠)$$

$$\frac{1 - \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1 + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} - \frac{1}{\gamma} \quad (٥١)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma + 1}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} - \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{(1 - \gamma)(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(1 - \gamma) - (\alpha + \gamma)(1 + \gamma)(\alpha - \beta)(1 + \gamma)}{\alpha - \gamma} \quad (٥٢)$$

$$\left( \frac{\gamma - 1}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} - \frac{\gamma + 1}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} \right) \div \left( \frac{\gamma - 1}{\frac{1}{\alpha} + \gamma + 1} - \frac{\gamma + 1}{\frac{1}{\alpha} + \gamma - 1} \right) \quad (٥٣)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} - \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} \div \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} + \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma}$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} + \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} \div \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} + \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma}$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} - \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} \times \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} + \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} \quad (٥٥)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} + \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} \times \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma} + \frac{\frac{1}{\alpha} + \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \gamma}$$

$$\left\{ \frac{(1 + \gamma)\alpha}{\gamma + \alpha + \beta + \gamma} - 1 \right\} \left\{ \frac{(1 + \gamma)\alpha}{\gamma + \alpha - \beta - \gamma} + 1 \right\} (\gamma + \alpha) \quad (٥٦)$$

$$\left\{ \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + 1 + 1} + 1 \right\} \div (1 + 1) \quad (٥٧)$$

$$\left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma + \alpha + \beta + \gamma} + \frac{\gamma + 1}{\gamma + \alpha - \beta - \gamma} \right\} - \left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma + \alpha + \beta + \gamma} + \frac{\gamma + 1}{\gamma + \alpha - \beta - \gamma} \right\} \quad (٥٨)$$





(٥١) $١٢ (٢ - ١) + ١٧ ب$	(٤٧) $٦ ط - ١٣ ط + ٢ ٢$
(٥٢) $٢ (٢ - ٥) + ٩ ب$	(٤٨) $٢٠ ص - ٩ ص - ٢٠ ع$
(٥٣) $٢١ ص + ٢ ص (٥ - ٨ ص)$	(٤٩) $٨ ص + ٢ ص - ١٥$
(٥٤) $٣ (٥ - ٢) + ١٧ م ٢$	(٥٠) $١٢ ص - ٣٠ ص + ١٢$

(تطبيقات على البنود من ١٣٣ الى ١٣٧)

حلل ما يأتي إلى عاملين أو أكثر

(٦٤) $١ - ٦٤ ٢$	(٥٥) $٢ - ٢ - ١ + ١٢ ب$
(٦٥) $١٠٠٠ ط + ٢ ط ٢$	(٥٦) $٢ - ٢ - ٢ + ٢ ب$
(٦٦) $٦٥٦١ - ٤$	(٥٧) $٢٧ ص + ٢ ص$
(٦٧) $٢ - ٢ - ٢ - ٢ - ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢$	(٥٨) $٣٤٣ + ٢ ٢$
(٦٨) $١٦ - ٢ (٢ - ٢)$	(٥٩) $١٢ - ٢ - ٢$
(٦٩) $٤ - ٢ - ٢ - ٢ (٢ - ٢)$	(٦٠) $٢ - ٢ (٢ - ٢)$
(٧٠) $١٦ ط + ٢ ط - ٤ ط$	(٦١) $٢ + ١ - ٢ + ٢ + ٢$
(٧١) $١٢٨ + ٢ (١ + ٢)$	(٦٢) $٢ + ٢ (٢ + ٢)$
(٧٢) $٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢$	(٦٣) $٢ (١ - ٢) - ٢ - ٢ + ٢ - ٢ - ٢$

تمرينات متنوعة على العوامل

حلل ما يأتي إلى عاملين أو أكثر

(٨٠) $٩ - ٢ - ٢ - ٢ + ١٦ ب$	(٧٣) $٢ ص + ٢ ص + ٢ ص + ٢ ص$
(٨١) $١ - ٢ + ٢ - ٢ ص$	(٧٤) $١ ص + ٢ ص - ٢ ص - ٢ ص$
(٨٢) $٣ - ٢ - ٢ - ٢ - ٢ (٢ - ٢)$	(٧٥) $١٥ - ٢ - ٢$
(٨٣) $٢ - ٢ - ٢ (٢ - ٢) (٢ - ٢)$	(٧٦) $٩٨ ص - ٧ ص - ٢ ص - ٢ ص$
(٨٤) $١ (٢ + ٢ - ٢)$	(٧٧) $١٤ - ١ - ٢$
(٨٥) $٨ - ٢ + ٢ (٢ - ٢)$	(٧٨) $١ - (٢ ط + ٢ ط)$
	(٧٩) $١ ب (٢ + ٢) - (٢ + ٢)$

(٨٦) ما عوامل الجذر التربيعي للقادر

$$(٢١ + ٢ ص + ٢ ص - ٢ ص) (٢ - ٢ - ٢ - ٢)$$

(٨٧) ما المقدار الذي مربعه

$$(٢ ص - ٢ ص - ٢ ص - ١٥ ص) (٢ ص - ٢ ص - ٢ ص - ١١ ص + ١٥ ص)$$

(تطبيقات على العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط)

(٨٨) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادير الآتية

$${}^2(1-2) {}^2206 (12-21+2) {}^21606 (12+213-2) {}^2113$$

(٨٩) أوجد العامل المشترك الأعلى للقدارين

$$(1-s)^8 + (1-s^2)^3 s^6 (1+s)^2 s^5 - (1+s)^2$$

(٩٠) أوجد المقدار الذي يقبل القسمة على كل من المقادير الآتية بحيث تكون درجته أقل ما يمكن

$$(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \neq (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4)(x^4 - \frac{1}{2}x^6)6$$

(٩١) أوجد المضاعف المشترك البسيط والعامل المشترك الأعلى للقادير الثلاثة الآتية

$$(u+1)! - (u+p) \cdot 6 \cdot (1+p) \cdot - (1+u) \cdot 6 \cdot (p+u) \cdot - (p+1)!$$

(٩٢) أوجد المقدار الأعلى درجة الذي يقسم كلا من المقدارين الآتين قسمة صحيحة

$$(12+5)u + (2-1)(2+1)6(12-2)2 + (5-1)(5+1)$$

(٩٣) أوجد المقدار الأصغر درجة الذى يكون المضاعف المشترك البسيط بينه وبين المقدار

$$u + u + 13 = 14$$

$$6 - 213 + 24 - 273 - 42$$

هو

(٩٤) يتن أن  $s^2 - 4$  ص  $2$  العامل المشترك الأعلى للقادير

سہ - ۳ سہ ۲ صہ - ۲ صہ ۱ صہ ۴ - ۱ صہ ۶ - ۱ صہ ۶ صہ ۱

$$6 \text{ ص}^0 + 32 \text{ ص}^0 - 8 \text{ ص}^2 + 2 \text{ ص}^4 + 2 \text{ ص}^6 + 16 \text{ ص}^8 - 16 \text{ ص}^{10} + 2 \text{ ص}^{12}$$

(٩٥) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير

$$C = 46 \text{ u} + 2 \text{ u} - 2 \text{ u} - C + 46 (\sigma - \text{u}) - (\sigma - 1)$$

(٩٦) يتبين أن المضاعف المشترك البسيط للتقدير

$$x^2 - x(x+1) \leq (x-u)u - u^2 \leq x^2 - (u-1)u$$

هو  $(\frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$

(٩٧) برهن على أن العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقدارين

$$14 + \sim 140 - \sim^2 \quad 70 + \sim^2 10 - \sim^4$$

$$210 + \sim 247 - \sim 101 + \sim 17 - \sim \quad 6$$

[illegible]

$$82 + \dots 13 - \frac{2}{\dots} 53 + \frac{2}{\dots} 13 - \frac{4}{\dots}$$

$$820 + 2 \times 389 - 2 \times 131 + 2 \times 19 - 2 \quad (6)$$

(تطبيقات على اختصار الكسور)

اختصار كلا من الكسور الآتية

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - 1} + \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1}{\frac{2}{3} - 1} \quad (٩٨)$$

$$\frac{(2 + \frac{1}{2})^2}{9 - \frac{2}{3}} - \frac{7 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 1} \quad (٩٩)$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \quad (١٠٠)$$

$$\frac{\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2})}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} \quad (١٠١)$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3} + 1} + \frac{2}{\frac{2}{3} - 1} + \frac{1}{\frac{2}{3} - 1} \quad (١٠٢)$$

$$\frac{\frac{2}{3}(2 - \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}(2 - \frac{1}{2})}{\frac{2}{3}(2 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2})} \quad (١٠٣)$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3} - 1} - \frac{1}{(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} \quad (١٠٤)$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3} - 1} \times \frac{2}{3} - \frac{4}{9 - \frac{2}{3}} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \quad (١٠٥)$$

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})} + \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} - \frac{2}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \quad (١٠٦)$$

$$\left\{ \frac{8 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} - (\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) \right\} \div \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \quad (١٠٧)$$

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - 1} + \frac{(\frac{2}{3} + 1)(1 - \frac{2}{3} + 1)}{\frac{2}{3} - 1} - \frac{(\frac{2}{3} + 1)(1 + \frac{2}{3} + 1)}{\frac{2}{3} + 1} \quad (١٠٨)$$

$$\frac{\frac{2}{3}(2 + 1) + 1(2 + 1)}{(2 + 1)(2 + 1)} - \frac{\frac{2}{3}(2 + 1) - 1(2 + 1)}{(2 - 1)(2 - 1)} \quad (١٠٩)$$

$$\left[ \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{2}{3} + 1} + \frac{2}{\frac{2}{3} + 1} \right] \div \left[ \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{2}{3} - 1 \right) \right] \quad (١١٠)$$

$$\frac{1 - \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2})}{\frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2})} + \frac{\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2})} \quad (١١١)$$

$$\frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + 1} - \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} - 1} + \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + 1} + \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \quad (١١٢)$$

$$\frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + 1} - \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + 1} + \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} - 1}$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \times \left\{ \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \right\} \quad (١١٣)$$

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \div \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} \times \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} \quad (١١٤)$$



$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} \div \frac{x}{x + 1} \quad (115)$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - (x+1) \frac{x}{x+1} - \left(\frac{x}{x+1} + x\right) \frac{x}{x+1} \quad (116)$$

$$\frac{x(1-x) + x(x+1)}{x(x-1) - x(x+1)} \div \frac{(x+1) - \frac{x(x-1) + x(x+1)}{1-x}}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}} \quad (117)$$

$$\left\{ \frac{1-x}{(x-1)(1-x)} + \frac{1-x}{(1-x)(x-1)} - \frac{x-x}{(x-1)(x-1)} \right\} \div \frac{(x-1-x-x-x-x+1)^2}{(1-x)(x-1)(x-1)} \quad (118)$$

### الباب الثالث والعشرون - معادلات أصعب من السابقة

بند ١٨٦ - سنبعث في هذا الباب في عدة معادلات متنوعة يقصد من بعضها إعادة ما تقدم من الطرق الواردة في الأبواب السابقة أما البعض الآخر فأكثرت صعوبة ويلزم لتسهيل حله استعمال طرق خاصة به وبمبظهر من الأمثلة الآتية المألوقة حلا وإفيا أكرهه الطرق فمعا

$$\frac{2-x-2}{5+x} = \frac{2-x-6}{7+x} \quad \text{مثال (١) حل}$$

$$(7+x)(2-x) = (5+x)(2-x-6) \quad \text{نضرب فيحدث أن}$$

$$14 - x + 2x - x^2 = 10 - 5x - 6x - x^2 \quad \text{أى أن}$$

$$1 = 10 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{10} = x \quad \therefore$$

(ملاحظة) قد يسهل تحويل كثير من المعادلات إلى الصورة الموضوع بها المعادلة السابقة ومتى تم ذلك لا يبق سوى أن نجري ما يسمى بالضرب التبادلى لإكمال حلها

$$1 - \frac{2+x}{5} = \frac{2+x-8}{4+x} \quad \text{مثال (٢) حل}$$

نضرب كل حد في ٢٠ (قبل عملية الضرب التبادلى) فيحدث أن

$$20 - 12 + x = \frac{(2+x)20}{4+x} - 23 + x$$

$$\frac{(2+x)20}{4+x} = 31 \quad \text{وبالقل يحدث أن}$$

$$(2+x)20 = 124 + 4x \quad \text{وبالضرب التبادلى نجد أن}$$

$$x = 84$$

$$12 = x \quad \therefore$$

وإذا وجدت في المعادلة كسور ذات مقامات متصلة توضع في طرف واحد ثم تختصر

(مثال ٣) لحل

$$٤ + \frac{س - \frac{1}{٤} - ١٦}{٢ + س} = \frac{٨ \frac{1}{٢} + س - ٢٣}{٥ + س - ٤} + \frac{س - ٢ - ١٣}{٢ + س}$$

نقول إنه بالنقل يحدث أن

$$\frac{س - \frac{1}{٤} - ١٦}{٢ + س} = ٤ - \frac{٨ \frac{1}{٢} + س - ٢٣}{٥ + س - ٤}$$

$$\frac{س - ٧ + ٢}{٢ + س} = \frac{\frac{٢٥}{٢} - س - ٧}{٥ + س - ٤}$$

∴

وبالضرب التبادلي يحدث أن

$$\frac{س - ٢٥}{٤} + ١٥ + س - ٧ + س - ١٢ = ٣٥ - س - ٢١ + \frac{س - ٣٥}{٢}$$

$$٥٠ = \frac{س - ١٣٧}{١٢}$$

$$\frac{٦٠٠}{١٣٧} = س$$

∴

(مثال ٤) لحل

$$\frac{٧ - س}{٩ - س} + \frac{٥ - س}{٧ - س} = \frac{٤ - س}{٦ - س} + \frac{٨ - س}{١٠ - س}$$

نقول إنه يمكن حل هذه المعادلة بحذف الكسور ولكن هذا يستدعي عملا شاقا ويمكننا تبسيط العمل لو اتبعنا الحل الآتي

بالنقل يحدث أن

$$\frac{٤ - س}{٦ - س} - \frac{٧ - س}{٩ - س} = \frac{٥ - س}{٧ - س} - \frac{٨ - س}{١٠ - س}$$

وباختصار كل طرف من المعادلة على حده نجد أن

$$\frac{(٩ - س)(٤ - س) - (٦ - س)(٧ - س)}{(٦ - س)(٩ - س)} = \frac{(١٠ - س)(٥ - س) - (٧ - س)(٨ - س)}{(٧ - س)(١٠ - س)}$$

$$\frac{(٣٦ + س - ١٢ - س) - (٤٢ + س - ٤٢ + س)}{(٦ - س)(٩ - س)} = \frac{(٥٠ + س - ١٥ - س) - (٥٦ + س - ٥٦ + س)}{(٧ - س)(١٠ - س)}$$

$$\frac{١}{(٦ - س)(٩ - س)} = \frac{١}{(٧ - س)(١٠ - س)}$$

∴

ولكن البسطين متساويين يلزم أن يتساوى المقامان بمعنى أن

$$(٦ - س)(٩ - س) = (٧ - س)(١٠ - س)$$

$$٥٤ + س - ١٥ - س = ٧٠ + س - ١٧ - س$$

$$٢ = ١٦$$

$$٨ = س$$

∴

ويمكن حل المعادلة نفسها بطريقة دقيقة كما يأتي

يمكننا أن نكتب المعادلة بالصورة الآتية

$$\frac{٢ + (٩ - س)}{٩ - س} + \frac{٢ + (٧ - س)}{٧ - س} = \frac{٢ + (٦ - س)}{٦ - س} + \frac{٢ + (١٠ - س)}{١٠ - س}$$

$$\frac{٢}{٩ - س} + ١ + \frac{٢}{٧ - س} + ١ = \frac{٢}{٦ - س} + ١ + \frac{٢}{١٠ - س} + ١$$

$$\frac{١}{٩ - س} + \frac{١}{٧ - س} = \frac{١}{٦ - س} + \frac{١}{١٠ - س}$$

أي أن

$$\frac{1}{9-\sqrt{5}} - \frac{1}{9-\sqrt{5}} = \frac{1}{7-\sqrt{5}} - \frac{1}{10-\sqrt{5}}$$

وبالقل نجد أن

$$\frac{2}{(9-\sqrt{5})(9-\sqrt{5})} = \frac{2}{(7-\sqrt{5})(10-\sqrt{5})} \quad \therefore$$

ثم نتاج السيفى العملية كما سبق

$$\frac{7-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} - \frac{55-\sqrt{5}}{14-\sqrt{5}} = \frac{11-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} - \frac{74-\sqrt{5}}{13-\sqrt{5}} \quad \text{حل (مثال ٥)}$$

$$\left(\frac{1}{7-\sqrt{5}} + 1\right) - \frac{1}{14-\sqrt{5}} + 4 = \left(\frac{1}{7-\sqrt{5}} + 2\right) - \frac{1}{13-\sqrt{5}} + 5$$

$$\frac{1}{7-\sqrt{5}} - \frac{1}{14-\sqrt{5}} = \frac{1}{7-\sqrt{5}} - \frac{1}{13-\sqrt{5}} \quad \therefore$$

ثم نتم الحل كما سبق فنجد أن

(تمارين ١٢٣)

حل المعادلات الآتية

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} - \frac{5}{1+\sqrt{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{2}} - \frac{4}{1+\sqrt{2}} \quad (١٥)$$

$$\frac{8}{1-\sqrt{2}} - \frac{10}{1-\sqrt{2}} = \frac{6}{1-\sqrt{2}} - \frac{7}{1-\sqrt{2}} \quad (١٦)$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}-2} + \frac{3}{\sqrt{2}-2} = \frac{20}{(\sqrt{2}-1)8} + \frac{3}{\sqrt{2}-4} \quad (١٧)$$

$$\frac{23}{1+\sqrt{2}} + 5 = \frac{40+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{25-20}{1+\sqrt{2}} \quad (١٨)$$

$$\frac{48}{1+\sqrt{2}} + 14 = \frac{8+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{36+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \quad (١٩)$$

$$\frac{9-\sqrt{2}}{7-\sqrt{2}} - \frac{8-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \quad (٢٠)$$

$$\frac{15-\sqrt{2}}{16-\sqrt{2}} - \frac{4-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{7-\sqrt{2}}{7-\sqrt{2}} - \frac{5+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} \quad (٢١)$$

$$\frac{15-\sqrt{2}}{17-\sqrt{2}} - \frac{13-\sqrt{2}}{15-\sqrt{2}} = \frac{9-\sqrt{2}}{11-\sqrt{2}} - \frac{7-\sqrt{2}}{9-\sqrt{2}} \quad (٢٢)$$

$$\frac{5+\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}} - \frac{2+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} = \frac{7+\sqrt{2}}{9+\sqrt{2}} - \frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \quad (٢٣)$$

$$\frac{7-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{7-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (٢٤)$$

$$\frac{4-\sqrt{5}}{1-\sqrt{2}} + \frac{20-\sqrt{8}}{7-\sqrt{2}} = \frac{13-\sqrt{10}}{2-\sqrt{2}} + \frac{17-\sqrt{4}}{4-\sqrt{2}} \quad (٢٥)$$

$$\frac{8-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{8-\sqrt{10}}{1-\sqrt{2}} - \frac{44-\sqrt{6}}{7-\sqrt{2}} + \frac{8-\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}} \quad (٢٦)$$

$$\frac{26}{1-\sqrt{2}} - \frac{26}{1-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{2}{3-\sqrt{2}} \quad (٢٧)$$

$$56 = \frac{4-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \quad (٢٨)$$

$$\frac{5+\sqrt{2}}{7-\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{2}}{8-\sqrt{2}} \quad (١)$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})^2} \quad (٢)$$

$$\frac{10-11}{\sqrt{2}+1} = \frac{5-7}{\sqrt{2}+1} \quad (٣)$$

$$\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+9} = \frac{(6+7)\sqrt{2}}{\sqrt{2}+9} \quad (٤)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{5+\sqrt{2}}{25-\sqrt{2}} - \frac{13+\sqrt{6}}{15} \quad (٥)$$

$$1 = \frac{28+\sqrt{2}}{12+\sqrt{2}} - \frac{8+\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}} \quad (٦)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2-\sqrt{4}}{1-\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \quad (٧)$$

$$\frac{75+\sqrt{2}}{15-\sqrt{2}} = \frac{25+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} \quad (٨)$$

$$1 = \frac{4}{1+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \quad (٩)$$

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8+\sqrt{12}} + \frac{1}{12} = \frac{7+\sqrt{6}}{6+\sqrt{9}} \quad (١٠)$$

$$1 \cdot \frac{1}{10} - \frac{2-\sqrt{4}}{10} = \frac{3-\sqrt{2}}{15-\sqrt{2}} + \frac{5-\sqrt{2}}{5} \quad (١١)$$

$$\frac{29-\sqrt{7}}{12-\sqrt{5}} - \frac{37+\sqrt{8}}{18} = \frac{(2+\sqrt{2})4}{9} \quad (١٢)$$

$$0 = 1 - \frac{(8+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})^2} \quad (١٣)$$

$$0 = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}} - \frac{5+\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} \quad (١٤)$$

$$(29) \quad ٠,٨٣ - (س - ٠,٦٢٥) = ٠,٩ - (س - ٠,٥٩٣٧٥)$$

$$(30) \quad (٢ + س + ١,٥) (٣ - س - ٢,٢٥) = (٢ - س - ٢,٢٥) (٣ - س - ١,٢٥)$$

$$(31) \quad \frac{٠,٩ - س - ٠,٥}{٠,٩ - س - ٠,٥} = \frac{١ - س - ٠,٥}{٠,٩ - س - ٠,٥}$$

$$(32) \quad \frac{(١ - س) - ٠,٥}{٠,٩ - س - ٠,٥} = \frac{١ - س - ٠,٥}{٠,٩ - س - ٠,٥}$$

$$(33) \quad ٢ - س - ٠,٤ = (٢ - س - ٠,٣) \frac{١}{٢} - \frac{(٢ - س - ٠,٣)(٢ - س - ٠,٣)}{١ - س - ٠,٢}$$

## المعادلات الحرفية

بند ١٨٧ - رأينا جميع المعاملات في المعادلات التي حللناها حتى الآن مقادير رقمية ولكن قد تشمل بعض المعادلات على معاملات حرفية (راجع بند ٦) وقد تعتبر هذه المعاملات كمقادير معلومة ولذا نستبقها في الحل

$$(مثال ١) \quad \text{لحل} \quad (س + ١) (١ + س) - (١ + س) = (س + ١) (س - ١)$$

نضرب الكليات المحصورة بين أقواس فنجد أن

$$س + ١ + س + ١ + س + ١ + س + ١ - س - ١ - س - ١ - س - ١ - س - ١ = س + ١ + س + ١ + س + ١ + س + ١$$

$$س + ١ = س + ١ + س + ١$$

$$س + ١ = س (١ + ١)$$

$$\frac{س + ١}{س + ١} = س$$

$$\frac{س + ١}{س + ١} = \frac{س}{س + ١} - \frac{١}{س + ١} \quad \text{(مثال ٢) لحل}$$

نقول إنه باختصار الطرف الأيمن نجد أن

$$\frac{س + ١}{س + ١} = \frac{(س + ١) - (س + ١)}{(س + ١) (س + ١)}$$

$$\frac{س + ١}{س + ١} = \frac{س (س + ١)}{(س + ١) (س + ١)}$$

$$\frac{١}{س + ١} = \frac{س}{(س + ١) (س + ١)}$$

$$\text{وبالضرب التبادلي نجد أن} \quad س + ١ = س (س + ١)$$

$$س + ١ = س (س + ١)$$

$$س + ١ = س (س + ١)$$

$$\frac{س + ١}{س + ١} = س$$

## (تمارين ٢٣ ب)

حل المعادلات الآتية

$$(١) \quad ١٣ - ٥س = ٥٢ - ١س$$

$$(٢) \quad ١س = (٥ - س)٤ + (١ - س)٦$$

$$(٣) \quad ٦(س - ٥) = ٦ + ٢س$$

$$(٤) \quad ٦(٥ + ١ - س) = (٥ + س)(١ - س)$$

$$(٥) \quad ١ + ٦ = س٢ + (٢ - س)١$$

$$(٦) \quad (س + ٥)٢ = ٥س - (س - م)٢$$

$$(٧) \quad (س - ٥)س = (س + ٥)(س + ١)$$

$$(٨) \quad (٥ - س)(٥ - ١) = (١ - س)(٥ - ١)$$

$$(٩) \quad \frac{(١٢ + س٢)٢}{١ + س٢} = \frac{١٢ + س٢}{١ + س٢}$$

$$(١٠) \quad \frac{٥ + س٢}{(س - ٥)٢} = \frac{(٥ - س)٢}{س - س٢}$$

$$(١١) \quad \frac{١}{٥} - \frac{١}{س} = \frac{١}{س} - \frac{١}{١}$$

$$(١٢) \quad \left(١ - \frac{س}{١}\right) \frac{٢}{٤} = \left(١ + \frac{س}{١}\right) \frac{٢}{٢}$$

$$(١٣) \quad \frac{٥}{س} + (٥ - ١)س = \frac{١}{س}$$

$$(١٤) \quad \frac{س٢}{١} - \frac{٥}{١} = \frac{س٢}{٥} - \frac{١٩}{٥}$$

$$(١٥) \quad \frac{٥ - س}{س - ١} = \frac{١ - س}{س - ٥}$$

$$(١٦) \quad \frac{٦(٥ - س)}{١ - س٢} = \frac{١ - س}{٢}$$

$$(١٧) \quad \left(\frac{١}{٢} - س\right) \frac{١٢}{٢} = \left(\frac{١ + س}{٢}\right) - (١ - س) \frac{١}{٤}$$

$$(١٨) \quad (٥ - س)١ + (١ - س)س = (٦ + س)١ - ٢س(٥ + ١)$$

$$(١٩) \quad \frac{٦٥}{١} + ٢س = (س - ٥)(س + ١) - (س + ١)٥$$

$$(٢٠) \quad = \left(١ + \frac{س}{٥}\right)٥ + (س + ٥) \frac{١}{٥} - (س - ١)٥$$

$$(٢١) \quad ٦ + \left(\frac{٥}{٢} - س\right) = \frac{٥٢}{٤} - (س - ١٢)١ + ٢س$$

$$(٢٢) \quad (س٣ + ١٢)(س٤ - ١) \frac{١}{٢} - \left(س - \frac{١}{٢}\right)س٤ = \left(\frac{١٢}{٢} + س\right)(١ - س٢)$$

$$\frac{1-s}{1-s^2} + \frac{s}{1-s} = \frac{1-s}{1-s^2} + \frac{1+s}{1-s} \quad (23)$$

$$1 - \left(1 - \frac{r}{1}\right) = (1 - r^2)(1 - r) \frac{1}{r} = \left(1 - \frac{r^3}{1}\right)\left(1 - \frac{r}{1}\right) (r^2)$$

$$\frac{(x^2 - 2x + 1)^2}{x^2 - 1} = \frac{1 - 2x + x^2}{x + 1} + \frac{(1 + x)x}{x - 1} \quad (20)$$

(مسألة ٣) حل

(۲) ... ..  $\hat{p} = \hat{u} + \hat{a}$

نقول أولاً إن هذا الاصطلاح في الوضع وإن لم نستعمله قبل الآن شائع في المعادلات الجبرية .  
ففي المعادلة الأولى اتخذنا حرفين مخصوصين جعلناهما معاملي المجهولين  $x$  و  $y$  وفي الثانية  
استعملنا نفس الحرفين مع شرطة فوق كل منهما ليدل على معاملي نفس المجهولين فيها وليس من الضروري  
أن يكون هناك ارتباط بين مقدار  $(x, y)$  إذ يجوز أن يكونا متغيرين كمتغير  $x$  و  $y$  ولكن كثيراً  
ما يحسن استعمال نفس الحرف بتغيير يسير في شكله ليدل على معنى مشترك فهنا  $x, y$  يدلان على  
معاملي  $x$  و  $y$  في المعادلتين وكذا  $x, y$  يدلان على معاملي  $x$  وهذا يساعد الذاكرة وقد يوضع  
أحياناً رقم بدل الشرطة هكذا  $x, y, x, y$  و  $x, y, x, y$  و  $x, y, x, y$

ولنرجع الآن إلى المعادلتين  $a + b = c$   $a = c - b$  ... (1)

(۲) .....  $\hat{p} = \hat{u} + \hat{a}$

فتضرب (۱) فی ت و (۲) فی ب فیحلت أن

$$\bar{u} = \bar{u}_u + \bar{u}_s$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$(a - b) = a - b$$

وبالطرح يبقى

$$(2) \dots\dots\dots \frac{a_0 - a_1}{a_1 - a_2} = r$$

ويمكن إيجاد قيمة  $\sigma$  بوضع قيمة  $\sigma$  بدلهما في إحدى المعادلتين (١) أو (٢) كما سبق في بند ١٠٤. ولكن نستحسن أن نوجد قيمة  $\sigma$  بطريقة حنف  $\sigma$  كما يأتي

نضرب المعادلة (١) في ٦ والمعادلة (٢) في ١ فيحصل أن

$$a_1 = a + a_1$$

$$11 + 1 = 12$$

;

$$a_1 - a_7 = m(a_1 - a_7)$$

وبالطرح یقی

$$\frac{21-21}{21-21} = \infty$$

أى أن

وبتغيير علامات المقام في مقدار صـ ليكون مساويا للمقام في مقدار سـ نرى أن

$$\frac{20-20}{01-01} = 6 \frac{21-21}{01-01} = 6$$



$$\begin{array}{l|l}
 ٢ = \frac{ص}{٥} + \frac{س}{١} \quad (١٦) & ص(٥+١) = س(٥-١) \quad (١٣) \\
 \frac{ص}{٥} = \frac{س}{١} & ص = س \\
 ١ = \frac{ص}{٥} - \frac{س}{١} \quad (١٧) & ٥٢-١٢ = ص(٥+١) + س(٥-١) \quad (١٤) \\
 \frac{١}{٥} = \frac{ص}{١} + \frac{س}{٥} & ٥٤ = ص(٥-١) - س(٥+١) \\
 & ١ = \frac{ص}{٥} + \frac{س}{١} \quad (١٥) \\
 & \frac{٢}{٥} = \frac{ص}{٥} + \frac{س}{١} \\
 & (\frac{١}{٥} + \frac{٢}{٥}) (\frac{١}{١} + \frac{١}{٥}) = ص \frac{١}{١} + س \frac{١}{٥} \quad (١٨) \\
 & (ص+س)٢ = (١+٢)(١+٢) = ٩ \quad (١٩) \\
 & ١ = (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٥}) \\
 & ٢ = ص(٥+١) + س(٥-١) \quad (٢٠) \\
 & ٢ = ص - س \\
 & ص(٥+١) = س(٥-١) \quad (٢١) \\
 & ٢ = ص + س
 \end{array}$$

### الباب الرابع والعشرون - مسائل أصعب من المتقدمة

بند ١٨٨ - أتينا في الأبواب السابقة بمسائل يؤدى حلها إلى استعمال معادلات من الدرجة الأولى وسنأتى في هذا الباب بمعادلات أخرى أصعب منها

(مثال ١) اشترى بقال ١٥ رطلا من التين ٢٨ رطلا من الزيتون بمبلغ ١٠١ قرش فوجد أنه يكسب ١٢٣ قرشا إذا باع التين بخسارة ١٠ في المائة والزيتون بمكسب ٣٠ في المائة فبكم اشترى الرطل من التين

نفرض أن ثمن شراء الرطل من التين س من القروش و ثمن شراء الرطل من الزيتون ص من القروش فيكون مجموع ما صرفه ١٥ س + ٢٨ ص من القروش

أى أن ١٥ س + ٢٨ ص = ١٠١ ... (١)

والمخسارة في التين  $\frac{١}{١٠} \times ١٥$  س من القروش والمكسب في الزيتون  $\frac{٣}{١٠} \times ٢٨$  ص من القروش فالمكسب الصافي  $\frac{٤٢}{١٠} ص - \frac{٣}{١٠} س$  من القروش

∴  $\frac{٤٢}{١٠} ص - \frac{٣}{١٠} س = ١٢٣$  ... (٢)

ومن (١) و (٢) يستنتج أن س = ٣ و ص = ٢ أى أنه اشترى رطل التين بمبلغ ٣ قروش ورطل الزيتون بمبلغ قورشين



( مثال ٢ ) في أى وقت بين الساعة ٤ و ٥ يسبق عقرب الدقائق عقرب الساعات بثلاث عشرة دقيقة

نفرض أن  $s$  تدل على عدد الدقائق المطلوبة بعد الساعة ٤

ولكون سرعة عقرب الدقائق = سرعة عقرب الساعات ١٢ مرة فعقرب الساعات يقطع في مدة  $s$  من الدقائق  $\frac{s}{12}$  من الأقسام التي يساوى كل قسم منها دقيقة

ولكون عقرب الدقائق في الساعة ٤ متأخرا عن عقرب الساعات بمقدار عشرين قسما كل منها يساوى دقيقة وفي الوقت المراد إيجاداه يكون عقرب الدقائق سابقا عقرب الساعات بمقدار ثلاث عشرة دقيقة فعقرب الدقائق إذن يقطع  $20 + 13$  أو  $33$  قسما زيادة على ما يقطعه عقرب الساعات

$$\text{وعلى ذلك يكون} \quad s = \frac{s}{12} + 33$$

$$\text{أى أن} \quad \frac{11}{12} s = 33$$

$$\therefore s = 36$$

فالوقت المطلوب هو الساعة ٤ والدقيقة ٣٦

وإذا سألنا في أى وقت بين الساعة ٤ والساعة ٥ يكون بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق ١٣ دقيقة يكون للسألة جوابان أحدهما الجواب السابق والآخر في حالة ما يكون عقرب الدقائق متأخرا عن عقرب الساعات بمقدار ١٣ دقيقة وفي هذه الحالة يقطع عقرب الدقائق زيادة على ما يقطعه عقرب الساعات

$$20 - 13 = 7 \text{ قسما أى ٧ أقسام}$$

$$\text{وإذن} \quad s = \frac{s}{12} + 7$$

$$\therefore s = 7 \frac{7}{11}$$

فالوقتان هما الساعة الرابعة والدقيقة  $7 \frac{7}{11}$  والساعة الرابعة والدقيقة ٣٦

( مثال ٣ ) سار شخصان أ ب في آن واحد من بلدين البعد بينهما  $c$  من الكيلومترات ومشيا في اتجاه واحد وكانت سرعة أ هي  $u$  من الكيلومترات في الساعة وسرعة ب هي  $v$  من الكيلومترات في الساعة فما المسافة التي يمشيها أ ليلاقي ب

نفرض أن أ يمشي  $s$  من الكيلومترات فيكون ب قد مشى  $s - c$  من الكيلومترات ولكون سرعة أ هي  $u$  من الكيلومترات في الساعة فهو يمشي  $s$  من الكيلومترات في  $\frac{s}{u}$  من الساعات ولكون سرعة ب هي  $v$  من الكيلومترات في الساعة فهو يمشي  $s - c$  من الكيلومترات في  $\frac{s - c}{v}$  من الساعات ولكون هذين الزمتين متساويين يكون

$$\frac{s}{u} = \frac{s - c}{v}$$

$$\text{أو} \quad v s = u s - u c \quad \text{أو} \quad u s - v s = u c$$

$$\therefore s = \frac{u c}{u - v}$$

وحينئذ ما يمشيه أ هو  $\frac{u c}{u - v}$  من الكيلومترات

(مثال ٤) قطع قطار مسافة بسرعة منتظمة (أى ثابتة) ولو زادت سرعته ٦ أميال في الساعة على سرعته التى سار بها لنقص الزمن الذى استغرقه في قطع المسافة ٤ ساعات ولو نقصت سرعته ٦ أميال في الساعة لزد الزمن ٦ ساعات فما المسافة التى قطعها القطار  
نفرض أن سرعة القطار  $s$  من الأميال في الساعة ونفرض أن الزمن الذى قطع فيه المسافة المطلوبة  $t$  من الساعات فتكون المسافة المطلوبة  $s \cdot t$  من الأميال  
وعلى مقتضى الفرض الأول تصبح السرعة  $s + 6$  من الأميال في الساعة والزمن  $t - 4$  من الساعات فتكون المسافة التى يقطعها القطار  $(s + 6)(t - 4)$  من الأميال وعلى مقتضى الفرض الثانى تكون المسافة التى يقطعها القطار  $(s - 6)(t + 6)$  من الأميال  
ولكون جميع هذه المقادير التى تمثل المسافة متساوية  

$$\therefore s \cdot t = (s + 6)(t - 4) = (s - 6)(t + 6)$$
ومن هاتين المعادلتين نجد أن

$$\begin{aligned} s \cdot t &= s \cdot t + 6t - 4s - 24 \\ 6t - 4s - 24 &= 0 \quad (1) \\ s \cdot t &= s \cdot t - 6t + 6s + 36 \\ 6s - 6t + 36 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

ومن (١)  $6(2) = 30$  نجد أن  $s = 6$   $t = 24$  فالمسافة المطلوبة ٧٢٠ ميلا  
(مثال ٥) استثمر رجل مبلغ ٣٧٧٠ جنيا فاشترى ببعضه سندات ترين ٣ ٪ بسعر ١٠٢ وبالبعض الآخر سندات سكة حديدية ريجيا ٤ ٪ ١ ٪ بسعر ٨٤ جنيا فإذا كان إرادته من هذين المصدرين ١ ٪ ١٣٦ من الجنيئات في السنة فما المبلغان اللذان اشترى بهما هذين النوعين من السندات  
نفرض أن  $s$  عدد الجنيئات التى استثمرها فى السندات ذات ٣ ٪  $t$  عدد الجنيئات التى استثمرها فى سندات السكة الحديدية فترى أن

$$\begin{aligned} s + t &= 3770 \quad (1) \\ \text{ولكون الإيراد من السندات ذات ٣ ٪ هو } \frac{3}{102} \text{ أى } \frac{1}{34} \text{ جنيه} \\ \text{والإيراد من سندات السكة الحديدية } \frac{4}{84} \text{ أى } \frac{1}{21} \text{ جنيه} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{s}{34} + \frac{t}{21} &= \frac{1}{4} \quad (2) \\ \text{ومن (٢) يحدث أن } s + \frac{9}{14}t &= \frac{1}{4} \cdot 4632 \\ \text{وبطرح (١) من هذه المعادلة الأخيرة ينتج أن } \frac{13}{14}t &= 1050 \\ \therefore t &= 270 \quad s = 3500 \end{aligned}$$

ومن (١) فالمبلغان إذن ٢٧٢٠ جنيا اشترى بها السندات ذات ٣ ٪ ١٠٥٠ ٦ جنيا اشترى بها سندات السكة الحديدية

## (تمارين ٢٤)

- (١) قسمت ١٠ جنيناه مصرية بين عدة أشخاص ولو زاد عدد الأشخاص مقدار الربع لنقص نصيب كل منهم ٥ قروش فما عدد الأشخاص
- (٢) اشتريت عددا من البيض فدفعته قرشا في كل أربع بيضات ثم حفظت خمس ذلك العدد وبعث الباقي كل ثلاث بيضات قرش فكان مكسبي قرشا فكم بيضة اشتريت
- (٣) اشتريت لعبا صغيرة للأطفال فدفعته ٤ قروش في كل خمس لعب ولو أنى دفعت ٨ قروش في كل ١١ لعبة لنقص جميع ما دفعته ٤ قروش فكم لعبة اشتريت
- (٤) رجل معه مبلغ في جيبه فأضاف إليه ضعفه ثم صرف من الجميع ٨٠ قرشا وبعد ذلك فقد  $\frac{1}{3}$  ما بقي في جيبه ثم حصل على مبلغ يعادل ما كان معه أولا فصار ما معه ٤ جنيناه فما مقدار ما كان معه أولا
- (٥) صرفت ١٤٤٠ قرشا في شراء ٢٠ مترا من البفتة ٦ ٣٠ مترا من الحرير فإذا كان عدد القطع ذات خمسة القروش المشتمل عليها ثمن المتر من الحرير يعادل عدد القطع ذات نصف القروش المشتمل عليها ثمن المتر من البفتة فما ثمن المتر من كل
- (٦) عدد مركب من رقمين يزيد على خمسة أمثال مجموعهما مقدار تسعة ورقم العشرات يزيد واحد على رقم الآحاد فما العدد
- (٧) مجموع رقمي عدد أقل من مائة ٦ وإذا انعكس وضع الرقمين ينتج عدد أقل من العدد الأصلي بمائتين عشرين فما العدد
- (٨) مثل رجل عن عمره فأجاب أنه إذا طرح من عمري الحلال ستان يساوي الباقي ضعف عمر زوجتي ومنذ ثلاث سنين كان عمرها ثلث ما سيلبسه عمري بعد ١٢ سنة فما عمرها
- (٩) في أى وقت بين الساعة ١ ٦ يصنع عقربا الساعة زاوية قائمة للثقة الأولى
- (١٠) في أى وقت بين الساعة ٦ ٣٠ يسبق عقرب الدقائق عقرب الساعات بدقيقة
- (١١) متى يلتقي عقربا الساعة بين الساعة ٦ و ٧
- (١٢) إذا كانت الساعة الآن بين ٢ ٦ ٣ وبعد مضي عشرين دقائق يكون عقرب الدقائق سابقا عقرب الساعات بقدر تأخره عنه الآن فما الساعة الآن
- (١٣) في انتخاب عضو لمجلس زاد عدد الأصوات التي نالها شخص على ما نالها آخر ١٦٢ وهذا يعادل  $\frac{1}{3}$  من مجموع الأصوات فكم الأصوات التي نالها كل منهما
- (١٤) اشتراك عدة أشخاص في دفع صك ولو زاد عددهم ١٠ لنقص ما يدفعه الفرد ١٠ قروش ولو نقص عددهم ٥ ل زاد ما يدفعه كل فرد  $\frac{1}{3}$  قرشا فما عدد الأشخاص وما مقدار ما يدفعه كل منهم
- (١٥) صرف رجل ٥ جنيناه في شراء نوعين من الحرير سعر المتر من أحدهما  $\frac{1}{3}$  ٢٢ قرشا ومن الآخر ٢٠ قرشا ثم باع الحرير جميعه بسعر المتر  $\frac{1}{3}$  ٢١ قرشا وكان مكسبه  $\frac{1}{3}$  ٣٠ فما مقدار ما اشتراه من كل نوع

- (١٦) منذ عشرين سنين كان مجموع عمرى ولدين ثلث عمر والدتهما وأحد الولدين أكبر من الآخر بسنتين ومجموع عمرهما الآن أقل من عمر والدتهما بأربع عشرة سنة فما عمر كل منهما
- (١٧) سار  $١٦$  ب من نقطة واحدة بسرعتين مختلفتين وبعد أن قطع  $١٥١$  ميلا ضاعف ب سرعته وبذلك أمكنه أن يلحق  $١$  بعد  $٦$  ساعات فإذا كانت سرعة  $١$   $٥$  أميال في الساعة فما السرعة التي ابتدأ بها ب
- (١٨) أخذ شخص من مسقط يرتال نصف ما فيه وواحدة وأخذ ثان نصف الباقي وواحدة وثالث نصف الباقي الأخير وستا وكانت ما أخذه الثلاثة جميع ما في السقط فكم يرتال كانت في السقط
- (١٩) سبى شخص في نهر سرعة تياره  $\frac{1}{4}$  من الكيلومترات في الساعة فوجد أنه إذا سبى في الجهة المضادة لسير التيار مسافة كيلومتر استغرق أربعة أمثال الزمن الذي يقطع فيه الكيلومتر إذا سار متجها مع التيار فما سرعة هذا الشخص في السباحة
- (٢٠) في أى وقت بين الساعة  $٧$  و  $٨$  يتعامد عقربا الساعة وفي أى وقت يستقيان
- (٢١) يزيد مقام كسر على بسطه أربعة ولو طرح  $٥$  من كل من الحسنيين لساوى مجموع مقلوب الكسر الناتج وأربعة أمثال الكسر الأصلي  $٥$  فما الكسر الأصلي
- (٢٢) قام ساعيان من بلدين البعد بينهما  $٦٠$  كيلومترا في الظهر فمشى أحدهما بسرعة  $٤$  كيلومترات في الساعة ولكن وقف ساعيتن ونصفا في الطريق ومشى الآخر بسرعة  $٣$  كيلومترات في الساعة ولم يقف في الطريق فأين ومضى يقابلان
- (٢٣) سار  $١٦٦٦$  ب من نقطة واحدة بسرعة  $٤٦٥٦$  كيلومترات في الساعة على الترتيب وقام ب بعد  $١$  بمقدار ساعتين فبعد أى زمن من وقت قيام ب يجب ان يتبدى ج في السيرة حتى يلحق  $١$  في اللحظة التي يلحقه فيها ب
- (٢٤) لشترى تاجر حصانا بقصد أن يربح فيه عند بيعه  $١٠$  في المائة من ثمن الشراء ولكنه باعه بأقل مما كان ينتظر بخسین جنبها ووجد أنه خسر بذلك  $١٥$  في المائة مما دفعه فيه فكم اشترى الحصان
- (٢٥) مشى رجل من بلد  $١$  قاصدا بلد ب بسرعة  $٤$  كيلومترات في الساعة وبعد قيامه بساعة قامت مركبة سرعتها  $١٢$  كيلومترا في الساعة فلحقته في الطريق فركبها ووصل إلى ب فوجد أنه أمضى ساعتين في المركبة فما المسافة بين  $١$  و  $٦$  ب
- (٢٦) ما مقدار ثروة شخص إيراده السنوى  $١١٤٠$  جنيا إذا كان  $\frac{1}{13}$  منها يربح  $٢$  في المائة ونصفها يربح  $٣$  في المائة وثلثها يربح  $\frac{1}{4}$  في المائة والباقي لا يأتى يربح
- (٢٧) يصرف رجل ثلث إيراده ويقتصر الربع ويضع  $٥$  في المائة من إيراده في ربح دين عليه بسعر  $\frac{1}{7}$  في المائة ويبقى لديه بعد ذلك  $١١٠$  جنيها فما دينه
- (٢٨) قدران تشتملان على مخلوط من الماء والمخل ففى أحدهما يبلغ المخل ثلاثة أمثال الماء وفى الأخرى يبلغ الماء خمسة أمثال المخل فما مقدار ما يؤخذ من كل قدر لتلأ قدر ثلاثة سمعتها  $٧$  لترا ت بحيث يتناصف المخل والماء فيها

(٢٩) مخلوطان من خل وماء في أحدهما يبلغ الماء ضعف النخل وفي الآخر يبلغ النخل ثلاثة أمثاله الماء فما مقدار ما يؤخذ من كل من المخلوطين لتتلاء قدر سعتها لتر بحيث يتساوى مقدارا النخل والماء فيها

(٣٠) مشى رجلان في وقت واحد أحدهما من أ قاصدا ب والآخر من ب قاصدا أ والبعد بين الجهتين ٦ من الكيلومترات فإذا كان الرجل الأول يمشى بسرعة ط من الكيلومترات في الساعة والثاني بسرعة د من الكيلومترات في الساعة فعلى أى بعد من أ يتقابلان

(٣١) يقطع قطار لشركة السكة الحديدية الغربية بالإنجلترا المسافة من لندن إلى برمنجهام في ٣ ساعات ويقطع قطار لشركة السكة الحديدية الغربية الكبرى المسافة عنها من طريق آخر أطول من الأول بمقدار ١٥ ميلا في  $\frac{1}{4}$  من الساعات فإذا كانت سرعة القطار الثاني أقل من سرعة الأول بمقدار ميل في الساعة فما طول كل من الطريقين

(٣٢) اشتري تاجر بنا فدفع في الرطل ٥ قروش واشترى شكوريا بسعر الرطل  $\frac{1}{4}$  ٢ قرش فبأى نسبة يخطئهما حتى يكسب ١٠ % إن باع الرطل من المخلوط بسعر ٨ قروش

(٣٣) عند تاجر نونان من البن ثمن الرطل من أحدهما أ من القروش ومن الآخر ب من القروش فما مقدارا يأخذه من كل نوع ليتكوّن مخلوط وزنه أ - ب من الارطال يبيع الرطل منه بسعر ج من القروش بلا خسارة

(٣٤) صرف رجل د من القطع ذات خمسة القروش في شراء نوعين من الحرير ثمن المتر من أحدهما أ من القروش ومن الآخر ب من القروش وكان يمكنه أن يشتري بالمبلغ نفسه ثلاثة أمثاله ما اشتري من النوع الأول ونصف ما اشتري من الثاني فكم مترا من كل نوع اشتري

(٣٥) ركب رجل  $\frac{1}{4}$  المسافة بين أ ب بسرعة ل من الأميال في الساعة وركب الباقي من المسافة بسرعة م ٢ من الأميال في الساعة ولو سافر بسرعة منتظمة قدرها ٣ د من الأميال في الساعة لأمكنه أن يقطع المسافة من أ إلى ب ويعود من ب إلى أ في نفس الزمن الذي استغرقه أولا والمطلوب إثبات أن  $\frac{2}{5} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{م}$

(٣٦) أ ب ٦ د ثلاث قرى مكوّنة لثلاث زوايا مثلث وقد كلف رجل أن يمشى من إحداها إلى الثانية ثم يركب جوادا من الثانية إلى الثالثة ثم يركب عربة من الثالثة إلى النقطة التي ابتداء منها فإذا كان الرجل يقطع الكيلومتر ماشيا في ٦ من الدقائق ويقطعه راكبا الجواد في ٦ من الدقائق وراكبا العربة في ٦ من الدقائق وعلم أنه يستغرق ٦ + ٦ - ٦ من الساعات لو ابتداء من د ويستغرق ٦ + ٦ - ٦ من الساعات لو ابتداء من أ فما طول محيط المثلث

## الباب الخامس والعشرون - المعادلات ذات الدرجة الثانية

بند ١٨٩ - إذا أريد حل المسألة الآتية

اشترى تاجر عددا من الخيل بمبلغ ٢٨٠ جنيا ولو أنه اشترى بالمبلغ عينه عددا يقل عن ذلك العدد بتدريج زاد عن الحصان ثمانية جنيهات فكم حصانا اشترى

فأنا نجري العمل كما يأتي

نفرض أن عدد الخيل المطلوب  $x$  فيكون  $\frac{280}{x}$  عدد الجنيهات التي دفعت في كل حصان

ولو نقص عدد الخيل  $x$  لصار عددها  $x - 4$  وثمن كل واحد  $\frac{280}{x-4}$

$$\frac{280}{x-4} = \frac{280}{x} + 8$$

وعلى ذلك يكون  $x(x-4) = 280 + 8x$   $x^2 - 4x = 280 + 8x$

$$x^2 - 12x - 280 = 0$$

$$x^2 - 12x - 280 = 0$$

نرى في هذه المعادلة الأخيرة أنها تشتمل على مربع المجهول فلا يمكن إذن حل المسألة إلا إذا وقفنا على طريقة لحل مثل هذه المعادلة

بند ١٩٠ - تعريف : كل معادلة تشتمل على مربع المجهول ولا تشتمل عليه بدرجة أعلى من الدرجة الثانية تسمى معادلة من الدرجة الثانية وإذا اشتملت المعادلة على مربع المجهول وقوته الأولى فإنها تسمى معادلة تامة من الدرجة الثانية أما إذا لم تشتمل إلا على القوة الثانية للمجهول فتسمى معادلة ناقصة من الدرجة الثانية

فالمعادلة  $x^2 - 5x - 3 = 0$  معادلة تامة من الدرجة الثانية

والمعادلة  $x^2 - 20 = 0$  معادلة ناقصة من الدرجة الثانية

بند ١٩١ - يمكن اعتبار المعادلة الناقصة التي من الدرجة الثانية كمعادلة بسيطة يراد استخراج مربع المجهول فيها

$$\frac{9}{72-x} = \frac{52}{11-x}$$

(مثال) لحل

$$9(11-x) = 52(72-x)$$

$$99 - 9x = 3744 - 52x$$

$$51x = 3645$$

$$x = 71.47$$

وبأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة نجد أن  $x = \pm 8.45$  أمام العدد الذي في الطرف الأيسر للسبب الموضح بالبند ١٧٧ (ملاحظة)

بند ١٩٢ - ربما يظن عند أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة  $س = ٣٦$  أنه يجب وضع العلامة المزدوجة وهي  $\pm$  أمام كل من طرفيها هكذا  $س = \pm ٦$  ولكن بالبحث في جميع الحالات الممكنة نجد أن ذلك ليس ضروريا لأنه ينتج من  $س = \pm ٦$  أربع حالات وهي

$$+ س = ٦ \quad + س = -٦ \quad - س = ٦ \quad - س = -٦$$

وهذه الأربع الحالات تدخل في الحالتين اللتين ذكرناهما قبلا أي  $س = ٦$  و  $س = -٦$  فيكفي إذن وضع العلامة المزدوجة أمام أحد الطرفين فقط عند أخذ الجذر التربيعي لها

بند ١٩٣ - المعادلة  $س^٢ = ٣٦$  مثال لأبسط أشكال المعادلات التي من الدرجة الثانية ويمكن حل المعادلة ( $س = ٣$  و  $س = -٣$ ) بأخذ الجذر التربيعي للطرفين فتحدث معادلتان بسيطتان هما  $س = ٣$  و  $س = -٣$

فإذا اعتبرنا العلامة العليا نجد أن  $س = ٣$  و  $س = -٣$  أي أن  $س = ٨$

وإذا اعتبرنا العلامة السفلى نجد أن  $س = ٣$  و  $س = -٣$  أي أن  $س = ٢$

فالناتج إذن  $س = ٨$  أو  $س = ٢$

وبالتأمل في المعادلة ( $س = ٣$  و  $س = -٣$ ) نجد أنه يمكن وضعها هكذا

$$س^٢ = ٣٦ \quad س = ٣ \quad س = -٣$$

$$س^٢ = ٣٦ \quad س = ٣ \quad س = -٣$$

وإذا ما رجعنا إلى الخطوات السابقة نجد أن المعادلة

$$س^٢ = ٣٦ \quad س = ٣ \quad س = -٣$$

يمكن حلها بإضافة ( $س = ٣$ ) أي ٩ إلى كل من الطرفين ثم أخذ الجذر التربيعي والسبب في هذه الإضافة أن إضافة التسعة إلى الطرف الأيمن تجعله مربعا كاملا

نعم أن المتطابقتين الآتيتين صحيحتان مهما كان مقدار ١

$$س + ٢ + س = ٩ + س = (س + ١)$$

$$س - ٢ - س = ٩ + س = (س - ١)$$

فيشترط إذن في المقدار ذي ثلاثة الحدود إذا كان مربعا كاملا وكان معامل أكبر قوة فيه وهي  $س^٢$  الوحدة أن يكون الحد الخالي من  $س$  مساويا لمربع نصف معامل  $س$  فاننا علم الحقائق اللذان يشتملان على  $س^٢$  و  $س$  يمكن إكمال المربع بإضافة مربع نصف معامل  $س$

(ملاحظة) إذا كان المقدار مربعا كاملا وجب أن تكون الحدود المربعة موجبة دائما (راجع ملاحظة بند ١١٤) وحينئذ يجب أن نجعل  $١ +$  معاملا للحد  $س^٢$  إذا اقتضت الضرورة ذلك قبل جعل المربع كاملا

$$\text{مثال (١) حل} \quad ٣٢ = \text{سره} + ١٤ = ٢$$

نقول إن مربع نصف ١٤ هو  $(٧)^2$

$$\therefore \text{سره} + ١٤ = \text{سره} + (٧)^2 = ٤٩ + ٣٢$$

$$\text{أى أن} \quad ٨١ = (٧ + \text{سره})^2$$

$$\therefore \text{سره} + ٧ = ٩ \pm$$

$$\therefore \text{سره} = -٧ + ٩ \text{ أو } -٧ - ٩$$

$$\text{أى أن} \quad \text{سره} = ٢ \text{ أو } ١٦$$

$$\text{مثال (٢) حل} \quad ٧ \text{ سره} = \text{سره} - ٨$$

نتقل الحدود بحيث تكون الحدود المشتبهة على سره في جهة ويكون الحد المربع موجبا

$$\text{فيكون} \quad ٨ = \text{سره} - ٧ = \text{سره}$$

$$\text{وبالمثل المربع يحدث أن} \quad \text{سره} - ٧ = \text{سره} + (٧/٢)^2 = ٤٩/٤ + ٨$$

$$\text{أى أن} \quad (٨ - \text{سره}) = (٧/٢)^2 = ٨١/٤$$

$$\therefore \text{سره} - ٧/٢ = ٩/٢ \pm$$

$$\therefore \text{سره} = ٧/٢ \pm ٩/٢$$

$$\text{أى أن} \quad \text{سره} = ٨ \text{ أو } ١$$

(ملاحظة) لم تستخرج قيمة  $(٧/٢)$  الواقعة في الطرف الأيمن من المعادلة لأن ذلك غير ضرورى

بل بقاؤها على حالها أولى وأوفق

### (تمارين ٢٥ ١)

حل المعادلات الآتية

$$(١) \quad ٥ = (٥ + \text{سره})^2 \quad \text{سره} = ٦$$

$$(٢) \quad ٣ = \text{سره}^2 = ٤ = (٢ - \text{سره})^2$$

$$(٣) \quad ٧٥ = \text{سره}^2 + ٢٢ = \text{سره}$$

$$(٤) \quad ٢٥ = \text{سره}^2 + ٢٤ = \text{سره}$$

$$(٥) \quad ٢١ = \text{سره}^2 - ١٠ = \text{سره}$$

$$(٦) \quad ١٧ = (٩ + \text{سره})(٩ - \text{سره})$$

$$(٧) \quad ١٨ = \text{سره}^2 + ٣ = \text{سره}$$

$$(٨) \quad ١٤ = \text{سره}^2 + ٥ = \text{سره}$$

$$(٩) \quad ٠ = \text{سره}^2 - ٥ = ٣٦ - \text{سره}$$

$$(١٠) \quad ٧٢ + \text{سره} = \text{سره}^2$$

$$(١١) \quad \text{سره}^2 - ٣٤١ = ٢٠ = \text{سره}$$

$$(١٢) \quad ٠ = ٢٢٠ + \text{سره} - \text{سره}^2$$

$$(١٣) \quad ١٣ = \text{سره}^2 - ٦٨ = \text{سره}$$

$$(١٤) \quad ١٥٦ = \text{سره}^2 + \text{سره}$$

$$(١٥) \quad ١٨٧ = \text{سره}^2 + ٦ = \text{سره}$$

$$(١٦) \quad ٢٣ = \text{سره}^2 + ١٢٠ = \text{سره}$$

$$(١٧) \quad ١٣ = \text{سره}^2 + ٤٢ = \text{سره}$$

$$(١٨) \quad ٢٢ = \text{سره}^2 - ٢٣ + \text{سره} = ٠$$

$$(١٩) \quad ٣٢ = \text{سره}^2 - \frac{٧}{٢} = \text{سره}$$

$$(٢٠) \quad \frac{١}{٢} = \text{سره}^2 + \frac{٤}{١٥} = \text{سره}$$

$$(٢١) \quad ٠ = \frac{١}{٢} - \text{سره} - \frac{٧}{٢} = \text{سره}$$

$$(٢٢) \quad \frac{١}{٢} - \frac{٤}{٥} = \text{سره} = \frac{١١}{١٠}$$

$$(٢٣) \quad \frac{٢}{٥} = (٦ + \text{سره})(٦ - \text{سره})$$

$$\frac{٢}{٢} = (\frac{١٨}{٥} + ٦٢ \frac{١}{١٠}) = \text{سره}$$



بند ١٩٤ - أوضحنا أنه من السهل إكمال المربع متى كان معامل  $x^2$  الوحدة وقد يمكن جعل معامل  $x^2$  الوحدة في أى معادلة من الدرجة الثانية بقسمة كل حد من حدودها على معامل  $x^2$

(مثال ١) لحل  $3x^2 - 3x = 10$  سر

بالنقل يحدث أن  $3x^2 = 10 + 3x$  سر

وبقسمة كل الحدود على ٣ ليصير معامل  $x^2$  الوحدة ينتج

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{10}{3} + \frac{3x}{3} \text{ سر}$$

وبإكمال المربع يحدث أن  $x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{10}{3}$  سر

أى أن  $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2$  سر

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{36} \text{ سر}$$

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{36} = \frac{11}{3} \text{ سر}$$

(ملاحظة) يلاحظ أنه قد أضيف إلى الطرف الأيمن  $\left(\frac{1}{6}\right)^2$  عوضاً عن  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

(مثال ٢) لحل  $5x^2 + 11x = 12$  سر

نقسم الطرفين على ٥ فيحصل أن  $x^2 + \frac{11}{5}x = \frac{12}{5}$  سر

وبإكمال المربع يحدث أن  $x^2 + \frac{11}{5}x + \left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{12}{5} + \left(\frac{11}{10}\right)^2$  سر

أى أن  $\left(x + \frac{11}{10}\right)^2 = \frac{12}{5} + \left(\frac{11}{10}\right)^2$  سر

$$\left(x + \frac{11}{10}\right)^2 = \frac{12}{5} + \frac{121}{100} \text{ سر}$$

$$\left(x + \frac{11}{10}\right)^2 = \frac{12}{5} + \frac{121}{100} = \frac{19}{10} \text{ سر}$$

بند ١٩٥ - نستنتج مما سبق أن الخطوات التي تتبع في حل معادلة تامة من الدرجة الثانية هي

(أولاً) إذا اقتضى الحال نختصر المعادلة بحيث تكون الحدود المشتملة على  $x^2$  ٦ سر في طرف

والحد الخالى من سر في الطرف الآخر

(ثانياً) نجعل معامل  $x^2$  الوحدة الموجبة بقسمة طرفي المعادلة على معامل

(ثالثاً) نضم إلى كل من طرفي المعادلة مربع نصف معامل

(رابعاً) نستخرج الجذر التربيعي للطرفين

(خامساً) نحل المعادلات البسيطة الناتجة لاستخراج قيمة المجهول

بند ١٩٦ - في الأمثلة الآتية يجب إجراء شئ من التحويل قبل تطبيق القاعدة السابقة

(مثال ١) لحل  $\frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{4} = 2$  سر

نقول إنه بالاختصار يحدث أن  $\frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{4} = 2$  سر

وبالضرب نجد أن  $3x^2 - 5x = 8$  سر  $20 - 6x = 8$  سر  $24 + 3x^2$  سر

$$\text{أى أن} \quad ٣٢ = ٣٥ + ٢ - ٣$$

$$\text{وبالقسمة على } ٣ - \text{ يحدث أن} \quad \frac{٣٢}{٣} - = \frac{٣٥}{٣} - ٢$$

$$\text{وبإكمال المربع يحدث أن} \quad \frac{٣٢}{٣} - \frac{١٢٢٥}{٣} = \frac{٣٥}{٣} + ٢ - ٢$$

$$\text{أى أن} \quad \frac{٨٤١}{٣} = \frac{٣٥}{٣} - (٢ - ٢)$$

$$\therefore \quad \frac{٢٩}{٣} \pm = \frac{٣٥}{٣} - ٢$$

$$\therefore \quad ١٠ \frac{٢}{٣} = ٢ - ١$$

$$\text{(مثال ٢) حل} \quad ٧ (٢ + ٢) + ٣ = ١٥ (٧ + ٢) + ٢٣$$

نختصر فينتج أن

$$٧ + ٢٨ + ٢٨ + ٢٣ = ١٣٥ + ١١٥$$

$$\text{أى أن} \quad ١٨٤ = ١٧ - ٢$$

$$\text{وبنه ينتج أن} \quad ١٢ = ١ - ٢$$

$$\text{وبإكمال المربع نجد أن} \quad \frac{١٢}{٤} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + ٢ - ٢$$

$$\text{أى أن} \quad \frac{١٢٩}{٤} = \frac{١}{٢} - (٢ - ٢)$$

$$\therefore \quad \frac{١٧}{٢} \pm = \frac{١}{٢} - ٢$$

$$\therefore \quad ٤ = ١ - ٣$$

بند ١٩٧ - قد يوجد أحيانا جذر واحد للمعادلة

$$\text{فمثلا إذا كانت} \quad ٠ = ٢ - ٢ + ١ = ٠$$

$$\text{يكون} \quad ٠ = (١ - ٢)$$

ومنها ينتج أن  $١ = ٠$  وهو الجذر الوحيد للمعادلة ومع ذلك يحسن أن يقال في هذه الحالة وفيما سألها من الأحوال إن للمعادلة جذرين متساويين

(تمارين ٢٥ ب)

حل المعادلات الآتية

$$(١) \quad ٥٥ = ١٤ + ٢ - ٥$$

$$(٢) \quad ٣ = ١٢١ + ٢ - ٤٤$$

$$(٣) \quad ٢٥ = ٦ + ٢ - ٢١$$

$$(٤) \quad ٣٠ = ٨ + ٢ - ٣$$

$$(٥) \quad ٣ = ٣٥ + ٢ - ٢٢$$

$$(٦) \quad ٢٢ = ٦ - ٢ - ٠$$

$$(٧) \quad ١٥ = ١٧ + ٢ - ٤$$

$$(٨) \quad ٢١ = ٢ - ٢ - ٢$$

$$(٩) \quad ٩ = ١٤٣ - ٢ - ٦$$

$$(١٠) \quad ١٢ = ٢ - ٢٩ - ١٤$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1-5}{1+5} \quad (26)$$

$$\frac{2-5}{0+5} = \frac{8-5}{2-5} \quad (27)$$

$$\frac{1}{7+5} - 1 = \frac{1-2}{7+5} \quad (28)$$

$$\frac{0-5}{12-5} = \frac{7-0}{0-5} \quad (29)$$

$$0 = \frac{1-2}{2-5} - \frac{2+5}{7-5} \quad (30)$$

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{5-2} - \frac{1}{5+1} \quad (31)$$

$$1 \frac{1}{4} = \frac{2-5}{2-5} + \frac{4+5}{4-5} \quad (32)$$

$$\frac{1}{5-2} = \frac{4}{0} - \frac{1}{5-2} \quad (33)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{0}{2+5} - \frac{4}{1-5} \quad (34)$$

$$\frac{2}{6+5} = \frac{4}{5} - \frac{0}{2-5} \quad (35)$$

$$\frac{12+5}{1+5} = \frac{11-2}{4-5} + \frac{2-5}{2-5} \quad (36)$$

$$\frac{2}{1} = \frac{0}{1-5} + \frac{1}{10-2} \quad (37)$$

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{2-5} + \frac{2}{2-5} \quad (38)$$

$$\frac{7}{5} + 2 = 1 \left( \frac{5}{5} + 1 \right) + \frac{5}{2} \quad (39)$$

$$11 = 20 - 12 = 8 \quad (11)$$

$$19 = 8 - 10 = 2 \quad (12)$$

$$0 = 0 + 22 + 21 = 43 \quad (13)$$

$$27 = 10 - 2 = 8 \quad (14)$$

$$0 = 26 - 27 = 1 \quad (15)$$

$$21 + 8 = 29 \quad (16)$$

$$1 = 2 - 10 = 2 \quad (17)$$

$$1 = 2 + 3 = 5 \quad (18)$$

$$6 = 11 - 5 = 6 \quad (19)$$

$$12 = 22 + 10 = 32 \quad (20)$$

$$0 = 20 - 2 = 18 \quad (21)$$

$$2 = (3-5) = -2 \quad (22)$$

$$(3+5)(1+5) = 48 \quad (23)$$

$$(5-2)(5-3) = 4 \quad (24)$$

$$3-2+2 = 3 \quad (25)$$

$$2+3 = \frac{5+0}{1-5} \quad (26)$$

بند ١٩٨ - يتضح من الأمثلة المتقدمة أن كل معادلة من معادلات الدرجة الثانية يمكن أن توضع بالصورة الآتية بعد إجراء الاختزال والنقل المناسبين

$$0 = 2 + 3 + 5$$

بحيث إن كلا من المقادير ٢، ٣، ٥ يدل على أى مقدار عددي فإذا أمكن حل هذه المعادلة صار من السهل حل أى معادلة أخرى من الدرجة الثانية مهما كان نوعها كما سنبينه

$$0 = 2 + 3 + 5$$

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{1} + \frac{5}{1}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{1} + \frac{5}{1}$$

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{1} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{١٤-٤}{١٤} = \left( \frac{٥}{١٢} + س \right) \quad \text{أى أن}$$

$$\frac{١٤-٤}{١٢} \sqrt{١٤-٤} \pm = \frac{٥}{١٢} + س \quad \text{وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج}$$

$$\frac{١٤-٤}{١٢} \sqrt{١٤-٤} \pm = س \quad \therefore$$

بند ١٩٩ - يمكننا الآن أن نستعمل هذا القانون العام في حل المعادلات التي من الدرجة الثانية بوضع قيمة كل من ١ ٦ ٦ ٦ في القانون ثم استخراج قيمة س وبهذا نستغنى عن طريقة كمال المربع

$$٥ س^٢ + ١١ س - ١٢ = ٠ \quad \text{(مثال) لحل}$$

$$\text{نقول إن في هذه المعادلة } ١ = ٥ \quad ٦ = ١١ \quad ٦ = ١٢$$

$$\frac{١١ \pm \sqrt{١١^٢ - ٥ \times ٤ \times ١٢}}{٥} = س \quad \therefore$$

$$\frac{١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٢٤٠}}{٥} = س \quad \text{أو } \frac{١١ \pm ١٩}{٥} = س$$

وهي نفس النتيجة التي وجدناها باتباع طريقة الحل المذكورة في المثال ٢ بند (١٩٤)

$$\text{بند ٢٠٠ - يجب أن يلاحظ في استعمال القانون } س = \frac{١٤-٤}{١٢} \sqrt{١٤-٤} \pm \text{ أن}$$

الجذر التربيعي للكمية  $١٤-٤$  جميعها ٠ ولا يمكن إتمام الحل وإيجاد قيمة المجهول إلا إذا عرفت قيمة كل من ١ ٦ ٦ ٦ . وقد يتفق أن لا يكون المقدار  $١٤-٤$  مربعا كاملا بعد وضع المقادير العددية بدل كل من ١ ٦ ٦ ٦ وفي هذه الحالة لا يمكن استخراج قيمة كل من جذرى المعادلة بالضبط

$$\text{(مثال ١) لحل المعادلة } ٥ س^٢ - ١٥ س + ١١ = ٠$$

نقول إنه بمقتضى القانون يجب أن تكون

$$\frac{١٥ \pm \sqrt{١٥^٢ - ٤ \times ٥ \times ١١}}{٥} = س$$

$$\frac{٥ \pm \sqrt{٢٥}}{٥} = س \quad (١) \dots \dots \dots$$

$$٥ \pm ٢,٢٣٦ \approx س \quad \text{ولكون}$$

$$\frac{٥ \pm ٢,٢٣٦}{٥} = س \quad \text{إذن}$$

$$= ١,٧٧٣٦ \text{ أو } ١,٢٧٦٤$$

وهذان الجذران مقر بأن لغاية الرقم الرابع من الكسر العشري فقط ولذلك لا يمكن تحقيق المعادلة بأيهما تماما بل بالتقريب وإذا لم يكن المطلوب إيجاد المقادير العددية لجذور المعادلة فالعادة تركها على الصورة المبينة في (١) بدون اختصار

(مثال ٢) لحل المعادلة  $س^٢ - ٣س + ٥ = ٥$

$$\begin{aligned} \frac{س^٢ - ٣س + ٥}{٢} &= \frac{٥ \times ١ \times ٤ - (٣ - ١)}{٢} \\ \frac{س^٢ - ٣س + ٥}{٢} &= \frac{٢٠ - ٢}{٢} \\ \frac{س^٢ - ٣س + ٥}{٢} &= ٩ \end{aligned}$$

وعما أنا نعلم من بند (١١٠) أن مربع الكمية لا يكون سالبا سواء كانت موجبة أو سالبة نرى أنه يستحيل إذن أن توجد كمية تساوى بالضبط أو بالتقريب الجذر التربيعي للكمية - ١١ وعلى ذلك لا يمكن إيجاد مقدار حقيقي للجهول  $س$  به يمكن تحقيق المعادلة ففي مثل هذه الحالة يسمى جذرا المعادلة تخيليين وبالتأمل في القانون العام (بند ١٩٨) نرى أن جذرى المعادلة  $س^٢ + ٣س + ٥ = ٥$  يكونان دائما تخيليين إذا كانت  $س^٢ - ٣س + ٥$  كمية سالبة

(ملاحظة) إذا حلت المعادلة  $س^٢ - ٣س + ٥ = ٥$  بالرسم البياني كما موضح ببند ٤٢٧ فانخط البياني لا يقابل محور  $س$  أى المحور الأفقى مطلقا وبعبارة أخرى لا يوجد للحرف  $س$  مقدار عددي لو وضع بدل  $س$  في المقدار  $س^٢ - ٣س + ٥$  لصبه مساويا للصفر (لا بأس بمطالعة البنود من ٤٢٥ إلى ٤٢٧ الآن)

بند ٢٠١ - حل معادلات الدرجة الثانية بالعوامل  
يبد الطالب أحيانا أن طريقة الحل الآتية أقصر وأسهل من الطريقتين السابقتين فمثلا إذا تأملنا المعادلة:

$$س^٢ + \frac{٢}{٣}س - ٦ = ٠$$

نجد أنه بإزالة الكسور يصبح  $س^٢ + ٢س - ٦ = ٠$  ... (١)

و بتجليل الطرف الأيمن إلى عوامله ينتج أن

$$(س - ٢)(س + ٣) = ٠$$

فاذا كان أحد العاملين  $س - ٢$  أو  $س + ٣$  صفرا يكون حاصل ضربهما صفرا فيمكن إذن تحقيق المعادلة بأخذ أحد هذين القرضين

$$س - ٢ = ٠$$

$$س = ٢$$

$$س - ٦ = ٠$$

$$س = ٦$$

وعلى ذلك لجذرا المعادلة

ينتج من ذلك أنه إذا اختصرت أى معادلة من الدرجة الثانية ووضعت على صورة المعادلة (١) يسهل حلها متى أمكن تجليل الطرف الأيمن منها إلى عامليه وذلك بوضع كل من هذين العاملين مساويا للصفر لتكوين معادلتين بسيطتين يستنتج من كل منهما جذر من جذرى المعادلة ذات الدرجة الثانية

(مثال ١) لحل المعادلة  $٢س - ١س + ٢س = ١$

نقل جميع الحدود إلى أحد طرفي المعادلة فينتج أن

$$٢س - ١س + ٢س = ١ \Rightarrow ٣س = ١$$

ولكون  $٢س - ١س + ٢س = ١$   $\Rightarrow ٣س = ١$   $\Rightarrow ٣س = ١$   $\Rightarrow ٣س = ١$

$$(٣س = ١) \Rightarrow ٣س = ١$$

$$\therefore ٣س = ١$$

ومن هنا ينتج أن

$$٣س = ١$$

أو

$$٣س = ١$$

∴

(مثال ٢) لحل المعادلة  $٢س - ١س + ٢س = ١$

$$٢س - ١س + ٢س = ١ \Rightarrow ٣س = ١$$

قول إن

$$٢س - ١س + ٢س = ١ \Rightarrow ٣س = ١$$

أى

$$٢س - ١س + ٢س = ١ \Rightarrow ٣س = ١$$

وبالنقل يحدث أن

$$٢س - ١س + ٢س = ١ \Rightarrow ٣س = ١$$

أى أن

$$٢س - ١س + ٢س = ١ \Rightarrow ٣س = ١$$

∴

فالجزءان المطلوبان صفر  $\frac{٢}{٣}$

(ملاحظة) كان من الممكن أن نقيم طرفي المعادلة (١) على  $٣س$  فننتج المعادلة البسيطة

$٢س - ١س + ٢س = ١ \Rightarrow ٣س = ١$  وهو أخذ جذرى المعادلة ولكن يجب أن يلاحظ أنه

إذا حذفنا بالقسمة  $٣س$  أو أى عامل مشترك على  $٣س$  من جميع حدود المعادلة يجب أن لا يهمل

بالمرة لأنه يمكن تحقيق المعادلة باعتبار أن  $٣س = ٠$  وعلى ذلك فالصفر أحد جذرى المعادلة

بند ٢٠٢ - هناك بعض معادلات ليست فى الحقيقة من الدرجة الثانية ولكنها تحل بالطرق

التي شرحناها فى هذا الباب

(مثال ١) لحل المعادلة  $٣س + ١س = ٤$

قول إنه بالتحليل إلى العوامل نرى أن  $(٣س + ١س) = ٤$

$$٣س + ١س = ٤$$

∴

$$٣س + ١س = ٤$$

أو

$$٣س + ١س = ٤$$

وتكون

$$٣س + ١س = ٤$$

أى أن

(مثال ٢) لحل المعادلة  $٢س + ٣س = ٨$

$$٢س + ٣س = ٨$$

نضع بدل

$$٢س + ٣س = ٨$$

فينتج أن

$$٢س + ٣س = ٨$$

أى أن

ومن هذه المعادلة التي من الدرجة الثانية نجد أن

$$ص = ١٠ \text{ أو } ٢$$

$$ص = ٣ + ١٠ \text{ أو } ٢$$

∴

وبذلك تحولت المسألة إلى حل معادلتين من الدرجة الثانية وبحلها نجد أن

$$ص = ٥ - ٦ \text{ أو } ٢٦ - ٦$$

(تمارين ٢٥ - ٥)

حل المعادلات الآتية بالطريقة المهيئة بالبند ٢٠٠ وحقق الحل بالرمع البياني كما ميين ببند (٤٢٧)

$$(٧) \quad ٨ ص + ٧ = ٥$$

$$(٨) \quad ٥ ص = ١٧ - ص$$

$$(٩) \quad ٣٥ + ٩ ص - ٢ ص = ٠$$

$$(١٠) \quad ٣ ص = ١ + ١$$

$$(١١) \quad ٣ ص + ٥ ص = ٢$$

$$(١٢) \quad ٢ ص + ٥ ص - ٣٣ = ٠$$

$$(١) \quad ٣ ص = ١٥ - ٤ ص$$

$$(٢) \quad ٢ ص + ٧ = ١٥$$

$$(٣) \quad ٢ ص + ٧ = ٩ - ص$$

$$(٤) \quad ٣ ص + ٥ = ٠$$

$$(٥) \quad ٥ ص + ٤ + ٢١ = ٠$$

$$(٦) \quad ٧ ص = ١١ + ١$$

حل المعادلات الآتية بطريقة التحليل إلى العوامل

$$(٢٢) \quad ٤ ص - ٣٥ = ٤ ص$$

$$(٢٣) \quad ١٢ ص - ١١ = ٣٦ ص$$

$$(٢٤) \quad ١٢ ص + ٣٦ = ٤٣ ص$$

$$(٢٥) \quad ٣٥ ص + ٩ = ٦ ص$$

$$(٢٦) \quad ٣٦ ص - ٣٥ = ١٢ ص$$

$$(٢٧) \quad ١٢ ص - ١٢ = ٤ ص + ٢$$

$$(٢٨) \quad ١٢ ص - ١٢ = ٨ ص + ١٦$$

$$(٢٩) \quad ٣ ص - ١٢ = ٨ ص - ١٦$$

$$(٣٠) \quad ٣ ص + ٢ = ٨ ص$$

$$(١٣) \quad ٦ ص + ٧ = ٠$$

$$(١٤) \quad ٨ ص + ٢١ = ٢٦ ص$$

$$(١٥) \quad ٢٦ ص - ٢١ = ١١ ص$$

$$(١٦) \quad ٥ ص + ٢٦ = ٢٤ ص$$

$$(١٧) \quad ٤ ص = ٣ + \frac{٤}{١٥}$$

$$(١٨) \quad ٢ ص = \frac{٣٣}{١١}$$

$$(١٩) \quad ٧ ص = ٢٨ - ٩٦$$

$$(٢٠) \quad ٩٦ ص = ٤ + ١٥$$

$$(٢١) \quad ٢٥ ص = ٥ + ٦$$

حل المعادلات الآتية بالطريقة المهيئة في بند ٢٠٢

$$(٣٦) \quad ٢ ص + ٤ = \frac{٣٦}{٣ ص} + ٢$$

$$(٣٧) \quad ٢١٦ = (٣ ص + ١٩) ص$$

$$(٣٨) \quad (٢ + ٢ ص) ٢٩ = ١٩٨ + (٢ + ٢ ص) ٢$$

$$(٣٩) \quad ١٨ = \frac{٧٢}{٣ ص - ٢} + ص - ٢$$

$$(٤٠) \quad ٢٧ + \frac{٤٨}{٣ ص - ٢} = (١٢ - ص) ص$$

$$(٣١) \quad ٤ = ٥ ص - ٢ ص$$

$$(٣٢) \quad ٣٦ + ٤ ص = ١٣ ص$$

$$(٣٣) \quad ٨ = ٧ ص + ٢ ص$$

$$(٣٤) \quad ٢١٦ = ١٩ ص - ٢ ص$$

$$(٣٥) \quad ١٦ = \left( \frac{١}{٣ ص} + ٢ ص \right) ٢٥٧$$

بند ٢٠٢ - (١) طريقة حل المعادلات باستعمال العوامل قد تستعمل أيضا في حل المعادلات التي درجتها أعلى من الثانية

(مثلا) إذا كانت  $(س - ٢)(س + ١)(س + ٢) = ٠$  أمكن تحقيق هذه المعادلة بكل من المقادير التي يمكن أن تحقق بها المعادلات الثلاث الآتية

$$٠ = س - ٢$$

$$٠ = س + ١$$

$$٠ = س + ٢$$

٦

٦

وعلى ذلك تكون جذور المعادلة ٢ أو ١ أو -٢

(مثال) لحل المعادلة  $٣س^٢ + ٥س - ٢ = ٠$

نضع المعادلة بالصورة الآتية  $٣س^٢ + ٥س - ٢ = ٠$

فيكون  $٣س^٢ + ٥س - ٢ = (٣س + ٢)(س - ١)$

أو  $٠ = (٣س + ٢)(س - ١)$

∴  $٠ = (٣س + ٢)(س - ١)$

ومن هذه المعادلة الأخيرة ينتج أن

$$٠ = س + ١$$

$$٠ = س - ١$$

$$٠ = س + ٢$$

أو

أو

فالجذور المطلوبة إذن  $١ - ٦ ٦ - \frac{٢}{٣}$

(ملاحظة) كان من الممكن عند وصولنا في الحل إلى الدرجة التي وضعنا عليها الإشارة (\*)

تقسم طرفي المعادلة على  $٣س + ٢$  ولكن إن فعلنا ذلك فلا بد من جعل هذا العامل مساويا للصفر لتكون من ذلك معادلة بسيطة نستخرج منها أحد جذور المعادلة الأصلية

بند ٢٠٢ - (ب) إذا علم أحد جذور معادلة أو أمكن الحصول عليه بالتحسس فقد يمكننا أن نقسم طرفي المعادلة على عامل من الدرجة الأولى مركب من المقدار المجهول ناقصا الجذر المعلوم وبذلك نحصل على معادلة أقل درجة من المعادلة الأصلية

(مثال) لحل المعادلة  $٣س^٢ - ٢س - ١٦ = ٠$

نقول نجد بالتحسس أننا لو وضعنا بدل  $س$  العدد ٢ في الطرف الأيمن لصححت المعادلة وعلى ذلك يكون ٢ أحد جذور المعادلة ويكون  $س - ٢$  عاملا لها وحينئذ يمكن وضع المعادلة هكذا

$$٠ = (س - ٢)(٨ - س)$$

$$٠ = (س - ٢)(٨ - س)$$

$$٠ = س - ٨$$

ويحذف العامل  $س - ٢$  يبقى

ومن هذه المعادلة الأخيرة ينتج أن  $س = \frac{٣٣ \sqrt{٢} \pm ١}{٢}$

وعلى ذلك فتلاثة الجذور المطلوبة  $٢ \quad ٦ \quad \frac{٣٣ \sqrt{٢} + ١}{٢}$



## (تمارين ٢٥ س)

حل المعادلات الآتية بطريقة التحليل للعوامل

$$\begin{array}{l|l}
 (١) \quad ٠ = ١ - س - س^٢ + س^٣ & (٥) \quad ٠ = ٢ - س - س^٢ + س^٣ \\
 (٢) \quad ٠ = ٢ + س - س^٢ - س^٣ & (٦) \quad ٠ = ٣ + س - س^٢ + س^٣ \\
 (٣) \quad ٤ - س = س - س^٢ & (٧) \quad ٣٠ + س^٢ = ١٩ - س \\
 (٤) \quad ٠ = ١٥ - س - ٧ + س^٢ + س^٣ &
 \end{array}$$

حل المعادلات الآتية مع معرفة جذر لكل منها

$$\begin{array}{l|l}
 (٨) \quad ٠ = ٧٠ + س - س^٢ - س^٣ & [ ٥ = س ] \\
 (٩) \quad ٠ = ٨٤ - س - س^٢ - س^٣ & [ ٣ = س ] \\
 (١٠) \quad ١٦ - س^٢ = ١٦ - س^٢ & [ ١٤ = س ] \\
 (١١) \quad ٤٣٢ + س^٢ = ١٠٨ - س^٢ & [ ١٦ = س ]
 \end{array}$$

حل المعادلات الآتية بالطريقة المذكورة في بند ٢٠٠ وأوجد مقدار كل جذر مشتملا على

رقمين عشرين

$$(١٢) \quad ٣,٢ = س + س^٢$$

$$(١٣) \quad ٠ = ٣,٥١ - س - س^٢$$

$$(١٤) \quad ١,٠٩٥٦ = س + س^٢$$

$$(١٥) \quad ٠ = ٣٣٣,٧ + س - س^٢$$

$$(١٦) \quad ٠ = ٦,٠٣٥ + س - س^٢$$

$$(١٧) \quad ٠ = ٧,٣٧٧٦ + س - س^٢$$

(١٨) أوجد مقداري س واللذين يحصلان الكمية س (٣ - س) مساوية ٠,٣٦٢. وبين قيمة

كل منهما مقربة لغاية الرقم العشري الثاني .

(١٩) أوجد جذري المعادلة س (٢ - س) = ١,٧٣ بحيث يكون مقدار كل منهما مقربا

إلى واحد من عشرة .

(٢٠) حل المعادلة س^٢ + س - ١ = ٠ . ثم أوجد المقدارين الرقيين للجذرين إذا علم أن

١ = ١٢ بحيث يشتمل كل منهما على ثلاثة أرقام عشرية .

(٢١) حل المعادلة س (١ - س) = ٢ . ثم أوجد المقدارين الرقيين للجذرين إذا علم أن

١ = ١٦ = ٦ = ٦ بحيث يشتمل كل منهما على ثلاثة أرقام عشرية .

## الباب السادس والعشرون - المعادلات الآتية التي من الدرجة الثانية

بند ٢٠٣ - سنبحث الآن في بعض الطرق المفيدة لحل المعادلات الآتية التي يمكن أن تكون واحدة منها أو أكثر على درجة من الدرجة الأولى

وليس لحل المعادلات التي من هذا القبيل قواعد ثابتة تتبع في سائر الاحوال

(مثال ١) حل  $س + ص = ١٥$  ... .. (١)

(٢)  $س - ص = ٣٦$  ... ..

نقول إنه بتربيع المعادلة (١) ينتج أن  $س + ٢ + س - ص + ص = ٢٢٥$

ومن (٢) نستنتج أن  $٤ س - ص = ١٤٤$

وبالطرح ينتج أن  $س - ٢ + س - ص = ٨١$

وبأخذ الجذر التربيعي لطرفي هذه المعادلة ينتج أن  $س - ص = ٩$

وبربط هذه النتيجة الأخيرة مع (١) نتيج حالتان

$$س + ص = ١٥ \quad \text{أو} \quad س + ص = ١٥$$

$$س - ص = ٩ \quad \text{أو} \quad س - ص = ٩$$

ومن الحالتين ينتج أن  $س = ١٢$  أو  $س = ٣$

$$ص = ٣ \quad \text{أو} \quad ص = ١٢$$

(مثال ٢) حل  $س - ص = ١٢$  ... ..

(٢)  $س + ص = ٨٥$  ... ..

نقول من (١) ينتج أن  $س - ٢ + س - ص = ١٤٤$

ومن (٢) نستنتج أن  $٤ س + ص = ٣٤٠$

وبالجمع ينتج أن  $س + ٢ + س - ص = ٤٨٤$

وبأخذ الجذر التربيعي يحدث أن  $س + ص = ٢٢$

وبربط هذه النتيجة الأخيرة مع (١) نتيج حالتان

$$س + ص = ٢٢ \quad \text{أو} \quad س + ص = ٢٢$$

$$س - ص = ١٢ \quad \text{أو} \quad س - ص = ١٢$$

ومن الحالتين ينتج أن  $س = ١٧$  أو  $س = ٥$

$$ص = ٥ \quad \text{أو} \quad ص = ١٧$$

بند ٤٤١

بند ٢٠٤ - المثالان المتقدمان أبسط أنواع المعادلات التي نحن بصدها ولكنهما مهمتان جدًا لأنه يتوقف عليهما حل معادلات أخرى كثيرة ويجب على وجه الإجمال أن يكون الفرض الذي نجي إليه في حل مثل هذه المعادلات حلها بطريق التماثل وذلك بإيجاد مقدار كل من  $س + ص$  و  $س - ص$  ومن الأمثلة المتقدمة نعلم أن الحل ممكن متى حصلنا على حاصل ضرب المجهولين ومجموعهما أو الفرق بينهما

(مثال ١) حل  $س + ص = ٧٤$  ... (١)

(٢) ...  $س - ص = ٣٥$

نضرب المعادلة (٢) في ٢ ثم نجمع الحاصل إلى المعادلة (١)

فيحصل ان

$$٢س + ٢س - ص + ص = ١٤٤$$

وبطرح الحاصل من المعادلة (١) ينتج أن

$$س - ٢س + ص + ص = ٤$$

ومن هاتين المعادلتين الأخيرتين نستنتج أن

$$س + ص = ١٢$$

$$س - ص = ٢$$

٦

فيحصل إذن أربع حالات

$$\left\{ \begin{array}{l} ١٢ = س + ص \\ ٢ = س - ص \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ١٢ = س + ص \\ ٢ = س - ص \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ١٢ = س + ص \\ ٢ = س - ص \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ١٢ = س + ص \\ ٢ = س - ص \end{array} \right.$$

ومنها نتلخص مقادير س وهي  $٧ \ ٥ \ ٦ \ ٥ \ ٦ \ ٥ \ ٧$  قارن ذلك بما هو وارد  
ويقابل ذلك من المقادير لطرف ص  $٥ \ ٦ \ ٥ \ ٦ \ ٥ \ ٦ \ ٥$  في بند ٤٤١

(مثال ٢) حل  $س + ص = ١٨٥$  ... (١)

(٢) ...  $س + ص = ١٧$

نطرح (١) من مربع (٢) فينتج أن

$$٢س - ص = ١٠٤$$

(٣) ...  $س - ص = ٥٢$

:

ويمكن الآن حل المعادلتين (١) ٦ (٣) بالطريقة التي اتبعت في مثال ١ واستخراج الجذور الآتية

$$\left\{ \begin{array}{l} س = ١٣ \text{ أو } ٤ \\ ص = ٤ \text{ أو } ١٣ \end{array} \right.$$

(تمارين ١ ٢٦)

حل المعادلات الآتية

(٤) $س - ص = ٥$	(١) $س + ص = ٢٨$
$١٢٦ = س - ص$	$١٨٧ = س - ص$
(٥) $س - ص = ٨$	(٢) $س + ص = ٥١$
$٥١٣ = س - ص$	$٥١٨ = س - ص$
(٦) $س - ص = ١٠٧٥$	(٣) $س + ص = ٧٤$
$١٨ = س - ص$	$١١١٣ = س - ص$

١٨٠ =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص} (١٩)$	٩٢٢ =	$\frac{ص}{ص} (٧)$
٦ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$	٨٤ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$
١٨٥ =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص} (٢٠)$	٨ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (٨)$
٣ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$	١٣٥٢ =	$\frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$
١٣ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (٢١)$	٢٢ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (٩)$
٩٧ =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص}$	٣٨٤٨ =	$\frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$
٩ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (٢٢)$	٢١٩٢ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (١٠)$
٦١ =	$\frac{2}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{2}{ص}$	٨ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$
٣ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (٢٣)$	١٨ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (١١)$
١٩ =	$\frac{2}{ص} - \frac{2}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$	١٣٦٣ =	$\frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$
٧٦ =	$\frac{2}{ص} - \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{2}{ص} (٢٤)$	١٩١٤ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (١٢)$
١٤ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$	٦٥ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$
١ =	$\frac{1}{ص} - \frac{2}{ص} (٢٥)$	٨٩ =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص} (١٣)$
٥٢ =	$\frac{2}{ص} - \frac{2}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$	٤٠ =	$\frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$
٢ =	$\frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} (٢٦)$	١٧٠ =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص} (١٤)$
٢ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$	١٣ =	$\frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$
$\frac{٧}{١٢} =$	$\frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} (٢٧)$	٦٥ =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص} (١٥)$
١٢ =	$\frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$	٢٨ =	$\frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$
٢ =	$\frac{١}{ص} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ص} (٢٨)$	١٧٨ =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص} (١٦)$
١ =	$\frac{١}{ص} \frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص}$	١٦ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$
٢ + ط =	$\frac{2}{ص} + \frac{2}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (٢٩)$	١٥ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (١٧)$
	$\frac{2}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{2}{ص}$	١٢٥ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$
	$١ + ٢ + ٢ =$	٤ =	$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (١٨)$
		١٠٦ =	$\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$

بند ٢٠٥ - يمكن تحويل أى معادلتين موضوعتين على الصورة الآتية

$$(١) \dots \dots \dots \frac{2}{ص} = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$$

$$(٢) \dots \dots \dots \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$$

فيهما د رمز لعدد ما إلى إحدى الحالات التي سبق شرحها لأنه بتريع المعادلة (٢) وربط المعادلة الناتجة مع (١) نستخرج معادلة منها توجد قيمة  $\frac{ص}{ص}$  ثم نكمل الحل بمساعدة المعادلة (٢)

$$(١) \dots \dots \dots ٩٩٩ = \frac{2}{ص} - \frac{2}{ص} \quad \text{مثال (١) لحل}$$

$$(٢) \dots \dots \dots ٣ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$$

$$(٣) \dots \dots \dots ٣٢٢ = \frac{2}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} \quad \text{نقسم فيحدث أن}$$

$$\frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} = \frac{2}{ص} \quad \text{ومن (٢) نجد أن}$$

وبالطرح يحدث أن

أى أن

ومن (٢) ٦ (٤) نستنتج أن

$$(٤) \dots \dots \dots ١٠٨ = \text{صه} \dots \dots \dots ٣٢٤ = \text{صه} \dots \dots \dots ٣$$

$$\text{صه} = ١٢ \text{ أو } ٩$$

$$\text{صه} = ٩ \text{ أو } ١٢$$

$$(١) \dots \dots \dots ٢٦١٣ = \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ \dots \dots \dots \text{مثال (٢) لحل}$$

$$(٢) \dots \dots \dots ٦٧ = \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢$$

$$(٣) \dots \dots \dots ٣٩ = \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ \dots \dots \dots \text{نقسم (١) على (٢) فينتج أن صه - صه = صه}$$

$$\text{و يجمع (٢) على (٣) نجد أن} \quad \text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ = ٥٣$$

$$\text{ويطرح (٣) من المعادلة الأخيرة ينتج أن} \quad \text{صه} = ١٤$$

إذن

$$\text{بند ٢٠٤ مثال ١} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{صه} = ٧ \pm ٢ \text{ أو } ٧ \pm ٢ \\ \text{صه} = ٧ \pm ٢ \text{ أو } ٧ \pm ٢ \end{array} \right.$$

و

$$(١) \dots \dots \dots \frac{1}{٢} = \frac{1}{\text{صه}} - \frac{1}{\text{صه}} \dots \dots \dots \text{مثال (٣) لحل}$$

$$(٢) \dots \dots \dots \frac{٥}{٩} = \frac{1}{\text{صه}} + \frac{1}{\text{صه}}$$

$$\text{نربع (١) فيحصل أن} \quad \frac{1}{\text{صه}} = \frac{1}{\text{صه}} + \frac{٢}{\text{صه}} - \frac{1}{\text{صه}}$$

$$\text{وبالطرح ينتج أن} \quad \frac{٤}{٩} = \frac{٢}{\text{صه}}$$

و يربط هذه مع (٢) نجد أن

$$١ = \frac{1}{\text{صه}} + \frac{٢}{\text{صه}} + \frac{1}{\text{صه}}$$

$$\therefore ١ \pm = \frac{1}{\text{صه}} + \frac{1}{\text{صه}}$$

$$\frac{1}{٢} - \frac{1}{٢} = \frac{1}{\text{صه}} \text{ أو } \frac{1}{٢} = \frac{1}{\text{صه}} \dots \dots \dots \text{و يربط هذه مع (١) يحصل أن}$$

$$\frac{1}{٢} - \frac{1}{٢} = \frac{1}{\text{صه}} \text{ أو } \frac{1}{٢} = \frac{1}{\text{صه}}$$

$$\therefore \frac{1}{٢} = \frac{1}{\text{صه}} \text{ أو } ٣ - ٣ = ٦ \text{ صه} \text{ أو } ٣ = \frac{1}{٢} \text{ أو } ٣ - \frac{1}{٢}$$

(تمارين ٢٦ - ٣٠)

حل المعادلات الآتية

$$(١) \text{ صه}^٢ + \text{صه}^٢ = ٤٠٧$$

$$\text{صه} + \text{صه} = ١١$$

$$(٢) \text{ صه}^٢ + \text{صه}^٢ = ٦٣٧$$

$$\text{صه} + \text{صه} = ١٣$$

$$(٣) \text{ صه} + \text{صه} = ٢٣$$

$$\text{صه}^٢ + \text{صه}^٢ = ٢٤٧٣$$

$$(٤) \text{ صه}^٢ - \text{صه}^٢ = ٢١٨$$

$$\text{صه} - \text{صه} = ٢$$

$2 \frac{1}{4} = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (١٣)$	$٤ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (٥)$
$٦ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$	$٩٨٨ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$
$٢ \frac{١٦}{١١} = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (١٤)$	$٢١٩٧ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (٦)$
$٤ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$	$١٣ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$
$\frac{١٥}{ص} = \frac{٢٤}{ص + ص} (١٥)$	$٢١٢٨ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (٧)$
$٨ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$	$٧٦ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$
$٥٦ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} (١٦)$	$٢٩٢٣ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (٨)$
$٢٨ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$	$٣٧ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$
$١٧ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (١٧)$	$٩٢١١ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (٩)$
$٦ = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$	$٦١ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$
$١٢٦ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (١٨)$	$٧٣٧١ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} (١٠)$
$٢١ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$	$٦٣ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$
$١ \frac{1}{١٢٥} = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} (١٩)$	$\frac{٤٨١}{٥٧٦} = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} (١١)$
$١ \frac{1}{٥} = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص}$	$\frac{٢٩}{٧٤} = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص}$
$٩١ = \frac{1}{ص} - \frac{1}{ص} (٢٠)$	$\frac{٦١}{٩٠٠} = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص} (١٢)$
$١ = \frac{1}{ص} - \frac{1}{ص}$	$٣٠ = \frac{ص}{ص}$

بند ٢٠٦ - يمكن استعمال الطريقة الآتية في جميع الأحوال التي تكون فيها المعادلتان من درجة واحدة ومتجانستين [راجع بند ٢٤]

(١) مثال) حل  $٧٤ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$  ... ..

(٢)  $٧٣ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$  ... ..

نضع م ص = كل من المعادلتين فيبحث أن

(٣)  $٧٤ = (\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص})$  ... ..

(٤)  $٧٣ = (\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص})$  ... ..

و

$$\frac{٧٤}{٧٣} = \frac{\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}}$$

وبالقسمة نجد أن

$$\frac{٧٤}{٧٣} = \frac{٢١٤٦ + ٢٧٣ + ٧٣}{٢٧٤ + ٢١٤٨ + ١٤٨} \therefore$$

$$٠ = ٧٥ - ٢٧٥ - \frac{٢٧٣}{٢٧٤} \therefore$$

$$٠ = ٢٥ - ٢٢٥ - \frac{٢٢٤}{٢٢٤} \text{ أي} \therefore$$

$$٠ = (٥ - ٢٣)(٥ + ٢٨) \therefore$$

$$\frac{٥}{٢} - \frac{٥}{٨} = ٢ \therefore$$

$$\frac{0}{8} - = 2 \quad \text{(أولاً) نعتبر أن}$$

فنضع هذه القيمة في (٣) أو (٤)

$$74 = \left( \frac{0}{14} + \frac{0}{8} - 1 \right)^2 \quad \text{فينتج من (٣) أن}$$

$$74 = \frac{74 \times 74}{74} = \frac{0}{74} \quad \therefore$$

$$8 \pm = \frac{0}{74} \quad \therefore$$

$$0 \pm = \frac{0}{8} - = \frac{0}{74} = \frac{0}{74} \quad \therefore$$

$$\frac{0}{74} = 0 \quad \text{(ثانياً) نعتبر أن}$$

$$74 = \left( \frac{0}{9} + \frac{0}{74} + 1 \right)^2 \quad \text{فينتج من (٣) أن}$$

$$9 = \frac{9 \times 74}{74} = \frac{0}{74} \quad \text{أو}$$

$$7 \pm = \frac{0}{74} \quad \therefore$$

$$0 \pm = \frac{0}{7} = \frac{0}{74} = \frac{0}{74} \quad \therefore$$

بند ٢٠٧ - إذا كانت إحدى المعادلتين من الدرجة الأولى والأخرى من درجة أعلى من الأولى يمكننا أن نستخرج من المعادلة البسيطة قيمة أحد المجهولين بالنسبة إلى المجهول الآخر ثم نضع تلك القيمة في المعادلة الأخرى

$$(1) \dots \dots \dots 0 = 4 - \frac{0}{74} \quad \text{(مثال) لحل}$$

$$(2) \dots \dots \dots 21 = \frac{0}{74} - \frac{0}{74} - \frac{0}{74} \quad \therefore$$

$$\frac{0 + 0}{74} = \frac{0}{74} \quad \text{نستخرج من (١) أن}$$

$$21 = \frac{0}{74} - \frac{(0 + 0) \frac{0}{74}}{74} - \frac{(0 + 0) \frac{0}{74}}{74} \quad \text{وبوضع هذه القيمة في (٢) يحدث أن}$$

$$189 = 75 + 120 + 0 - 48 - 10 - 12 - 0 - 37 - 0 = 114 \quad \therefore$$

$$0 = 114 - 105 + 9 \quad \text{ومنه}$$

$$0 = 38 - 35 + 3 \quad \therefore$$

$$0 = (38 + 3) (1 - 0) \quad \therefore$$

$$\frac{38}{3} - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad \therefore$$

$$\frac{38}{3} - 3 = 0 \quad \text{أو} \quad \therefore \quad \text{وبالتعويض في (١) نجد أن}$$

بند ٢٠٨ - الأمثلة المتقدمة كافية لتوضيح الطرق التي تستعمل في حل المعادلات الآتية ذات الدرجة الثانية على وجه الأجمال ولكن قد يلزم أحيانا استعمال شيء من التحليل في الحل

$$(1) \dots \dots \dots 4 + 0 - 40 = 6 - 0 - 4 \quad \text{(مثال ١) لحل}$$

$$(2) \dots \dots \dots 3 = 0 - 0 \quad \therefore$$





## (تمارين ٢٦ &gt;)

حل المعادلات الآتية

$3\frac{1}{2} = 2\text{ صه} + 2\text{ سه} + 2\text{ شه} \quad (12)$	$17 = 5\text{ سه} - \text{صه} \quad (1)$
$2\frac{2}{3} = 2\text{ سه} - 2\text{ شه} + 2\text{ صه} + 2\text{ صه} \quad (13)$	$12 = \text{سه} \text{ صه}$
$0 = 1 + 2\text{ صه} + 2\text{ سه} - 2\text{ شه} \quad (14)$	$15 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (2)$
$13 = 2\text{ سه} - 2\text{ شه} + 2\text{ صه} + 2\text{ صه} \quad (15)$	$10 = \text{سه} + 2\text{ سه} \quad (3)$
$10 = 7\text{ سه} - 2\text{ شه} - 8\text{ سه} \quad (16)$	$10 = \text{سه} - \text{سه} \quad (4)$
$18 = 8\text{ سه} - 9\text{ سه} \quad (17)$	$84 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (5)$
$21 = 2\text{ سه} - 2\text{ شه} + 2\text{ سه} \quad (18)$	$16 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (6)$
$18 = \text{سه} + 2\text{ سه} \quad (19)$	$10 = \text{سه} \text{ صه}$
$54 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (20)$	$11 = 2\text{ سه} - \text{سه} \quad (7)$
$115 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (21)$	$47 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (8)$
$152 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (22)$	$1 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (9)$
$120 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (23)$	$17 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (10)$
$127 = 2\text{ سه} - 2\text{ شه} \quad (24)$	$9 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (11)$
$42 = 2\text{ سه} - 2\text{ شه} \quad (25)$	$43 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (12)$
$208 = 2\text{ سه} - 2\text{ شه} \quad (26)$	$5 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (13)$
$48 = (\text{سه} - \text{سه}) \quad (27)$	$2 = 2\text{ سه} - \text{سه} \quad (14)$
$84 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (28)$	$2 = 5\text{ سه} + \text{سه} \quad (15)$
$8 = \text{سه} + \text{سه} \quad (29)$	$1 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (16)$
$140 = 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} + 2\text{ سه} \quad (30)$	$28 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (17)$
$6 = \text{سه} \text{ صه} \quad (31)$	$8 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (18)$
$0 = 128 + 2\text{ سه} - 2\text{ سه} - 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (32)$	$23 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (19)$
$4 = \text{سه} \text{ صه} \quad (33)$	$12 = 2\text{ سه} - 2\text{ سه} \quad (20)$

## الباب السابع والعشرون

مسائل يؤدى حلها إلى استعمال معادلات من الدرجة الثانية

بند ٢٠٩ — منبحث في هذا الباب في مسائل يؤدى حلها إلى استعمال معادلات من الدرجة الثانية (مثال ١) سار قطار ٣٠٠ كيلومتر بسرعة منتظمة لو أنها زادت خمسة كيلومترات في الساعة لنقص الزمن الذى استغرقه ساعتين فما سرعة القطار

نفرض أن سرعة القطار  $s$  من الكيلومترات في الساعة فيكون الزمن الذى استغرقه في قطع المسافة  $\frac{300}{s}$  من الساعات

وبالفرض الآخر يكون الزمن  $\frac{300}{s+5}$  من الساعات

$$\therefore \frac{300}{s+5} = \frac{300}{s} - 2 \dots \dots \dots (١)$$

ومن هذا يستنتج أن  $s + 5 = 750 - s$

$$\text{أو} \quad (s + 5) = (750 - s)$$

$$\therefore s = 25 \text{ أو } 30$$

فالسرعـة إذن ٢٥ يلومترا في الساعة لأن مقدار  $s$  السالب لا يقبل عقلا

يحدث ظاهرا أن المعادلة الجبرية التى تتكون من منطوق المسألة يكون لها جذر (نتيجة) لا ينطبق على المسألة المراد حلها ولكن يمكننا أحيانا إيجاد معنى لأمثال تلك الجذور بتغيير عبارة المسألة والفروض المشتملة عليها فغيرا مناسباً فى المسألة السابقة يمكننا إيجاد معنى للجذر السالب كما يأتى ..

لكون المعادلة (١) تصبح بالجذرين ٢٥ - ٣٠ فإذا وضعنا  $s = 30$  بدل  $s = 25$  نجد أن المعادلة

$$(٢) \quad \frac{300}{s+5} = \frac{300}{s} - 2 \dots \dots \dots$$

تصح بالجذرين ٢٥ - ٣٠

وبتغيير جميع العلامات فى المعادلة (٢)

$$\text{ينتج} \quad \frac{300}{s-5} = \frac{300}{s} + 2$$

وهذه المعادلة تصبح بالجذرين ٢٥ - ٣٠ وهى ناتجة من السؤال الآتى

سار قطار ٣٠٠ كيلومتر بسرعة منتظمة لو نقصت خمسة كيلومترات في الساعة ل زاد الزمن الذى استغرقه ساعتين فما سرعة القطار (الجواب أن السرعة ٣٠ كيلومترا في الساعة) .

(مثال ٢) باع رجل حصانا بمبلغ ٧٢ جنيا فوجد أن خسارته فى المائة تساوى  $\frac{1}{8}$  عدد الجنيات التى دفعها ثمن الحصان فبكم اشترى الحصان

فرض أن الرجل اشترى الحصان بمبلغ  $s$  من الجنيهات فتكون خسارته في المائة جنيهه  $\frac{s}{8}$  من الجنيهات وتكون الخسارة في  $s$  من الجنيهات  $\times \frac{s}{800}$  أى  $\frac{s^2}{800}$  من الجنيهات

∴ الثمن الذى بيع به الحصان  $s - \frac{s^2}{800}$  من الجنيهات

$$∴ s - \frac{s^2}{800} = 72 \quad \text{أو}$$

$$s^2 - 800s + 57600 = 0$$

$$أى (s - 80)(s - 72) = 0$$

$$∴ s = 80 \text{ أو } 72$$

ولكون كل من هذين المقدارين يطابق الفروض المشتمل عليها منطوق المسألة يكون ثمن شراء الحصان ٨٠ جنيهاً أو ٧٢ جنيهاً .

(مثال ٣) حوض يمكن أن تملأه حنفيتان في  $\frac{1}{3}$  من الدقائق فإذا كانت الحنفية الكبرى تملأ الحوض في زمن أقل مما تملؤه فيه الصغرى بمقدار ١٥ دقيقة فما مقدار الزمن الذى تملأ كل منهما فيه الحوض بمفردها

فرض أن الزمن الذى تملؤه فيه الحنفية الصغرى  $s$  من الدقائق فيكون الزمن الذى تملؤه فيه الحنفية الكبرى  $s - 15$  من الدقائق فإذا فصعنا معا تملأان  $(\frac{1}{s-15} + \frac{1}{s})$  من الحوض في الدقيقة ولكونهما تملأان حسب منطوق المسألة  $\frac{1}{\frac{1}{3}}$  أو  $\frac{3}{1}$  من الحوض في دقيقة

$$\frac{3}{1} = \frac{1}{s-15} + \frac{1}{s} \quad \text{يكون إذن}$$

$$∴ 3(s-15) = (s-15)s$$

$$∴ 3s - 45 = s^2 - 15s$$

$$∴ (s-20)(s-3) = 0$$

$$∴ s = 20 \text{ أو } 3$$

فالصغرى تملؤه في ٢٠ دقيقة والكبرى في ٣ دقائق أما الناتج الثانى وهو  $\frac{3}{2}$  فنغير مقبول عقلا

(مثال ٤) رجل يمكنه أن يقطع ٢٤ كيلومترا في نهر في ٥ ساعات إذا جذف نصف المسافة مع التيار ومشى النصف الآخر على الشاطئ ولو جذف نصف المسافة في الجهة المضادة للتيار لاحتاج إلى ٧ ساعات لقطع المسافة بأجمعها أما إذا كان الماء راكداً فإنه يستغرق في قطع المسافة جاذفاً - ٥ من الساعات فما سرعته إذا مشى وما سرعته إذا جذف وما سرعة التيار

فرض أن الرجل يمشى على قدميه بسرعة  $s$  من الكيلومترات في الساعة ويجذف بسرعة  $v$  من الكيلومترات في الساعة وأن سرعة التيار  $x$  من الكيلومترات في الساعة

فإذا جذف مع التيار تكون سرعته صه + ع من الكيلومترات في الساعة وإذا جذف في الجبهة المضادة للتيار تكون السرعة صه - ع من الكيلومترات في الساعة ومن ذلك نستنتج المعادلات الآتية :

$$(١) \dots\dots\dots ٥ = \frac{١٢}{ع+صه} + \frac{١٢}{صه}$$

$$(٢) \dots\dots\dots ٧ = \frac{١٢}{ع-صه} + \frac{١٢}{صه} \quad 6$$

$$(٣) \dots\dots\dots ٥ \frac{٢}{٣} = \frac{١٢}{صه} + \frac{١٢}{صه} \quad 6$$

$$(٤) \dots\dots\dots \frac{١}{١٨} = \frac{١}{ع+صه} - \frac{١}{صه} \quad \text{ويطرح (١) من (٣) يحدث أن}$$

وكذلك بطرح (٣) من (٢) يحدث أن

$$(٥) \dots\dots\dots \frac{١}{٩} = \frac{١}{صه} - \frac{١}{ع-صه}$$

$$(٦) \dots\dots\dots (ع+صه) = ١٨ \quad \text{ومن (٤) نستنتج أن}$$

$$(٧) \dots\dots\dots (ع-صه) = ٩ \quad \text{ومن (٥) » »}$$

$$\frac{ع+صه}{ع-صه} = ٢ \quad \text{وبقسمة (٦) على (٧) يحدث أن}$$

$$ع = ٣ \quad \text{ومن هذه المعادلة نجد أن}$$

$$ع = ٣ \quad \text{فمن (٤) ينتج أن } ع = ١ \frac{١}{٣} \text{ وتكون صه } = ٦ \frac{٤}{٣} = ٨$$

فسرعته إذا مشى إذن ٨ كيلومترات في الساعة وسرعته إذا جذف  $١ \frac{١}{٣}$  من الكيلومترات في الساعة وسرعة التيار  $١ \frac{١}{٣}$  من الكيلومترات في الساعة

### (تمارين ٢٧)

(١) ما العدد الذي إذا طرح من مربعه ١١٩ يكون باقي الطرح مساويا لعشرة أمثال باقي طرح ٨ من هذا العدد

(٢) عمر رجل خمسة أمثال عمر ولده ومجموع مربعي عمرهما ٢١٠٦ فما عمرهما

(٣) مجموع مقلوب عددين متتاليين  $\frac{١٥}{٩٦}$  فما العدان

(٤) ما العدد الذي إذا أضيف إليه ١٧ يصير الناتج مساويا لمقلوب هذا العدد ستين مرة

(٥) ما العدان اللذان مجموعهما ٩ أمثال فرقهما وفرق مربعيهما ٨١

(٦) حاصل جمع عدد ومربعه تسعة أمثال العدد الذي يليه في الكبر فما العدد

(٧) إذا زادت سرعة قطار ٥ كيلومترات في الساعة لانه يقطع مسافة ٢١٠ كيلومترات في زمن أقل

ساعة مما يقطع فيه هذه المسافة عينا لو سار بسرعه الأصلية فما الزمن الذي يقطع فيه

القطار هذه المسافة

(٨) أوجد عددين مجموعهما ١٢ ومربعيهما ٧٤

(٩) محيط حقل مستطيل الشكل ٥٠٠ متر ومساحته ١٤٤٠٠ متر مربع فما طول أضلاعه

- (١٠) محيط مربع يزيد على محيط مربع آخر مائة متر ومساحة المربع الأكبر تزيد على ثلاثة أمثال مساحة الأصغر ٣٢٥ مترا مربعا فما طول ضلع كل منهما
- (١١) إذا فُتحت حثفتان معا تملآن حوضا في  $\frac{1}{4}$  من الدقائق وأكبرهما تملؤه في زمن يقل عما تملؤه فيه الصغرى بأربع وعشرين دقيقة فما الزمن الذي تملأ فيه كل منهما الحوض
- (١٢) قطع مسافر ١٠٨ كيلومترات فوجد أنه كان من الممكن أن يوفر  $\frac{1}{4}$  من الساعات إذا زادت سرعته كيلومترين في الساعة فما السرعة التي قطع بها هذه المسافة
- (١٣) اشتريت كرات خشبية بخمسة جنيهات ولو نقص ثمن الكرة خمسة قروش لأمكنني أن أشتري بالمبلغ نفسه خمسة كرات زيادة على ما اشتريت فما ثمن الكرة
- (١٤) اشتري خادم بيضا بمبلغ ٥ قروش وانكسر منه في الطريق أربع بيضات فزاد بذلك ثمن كل ٨ بيضات  $\frac{1}{4}$  قرش على سعر السوق فكم بيضة رجع بها الخادم
- (١٥) ما ثمن اثني عشرة بيضة إذا علم أنه لو زيد ٥ بيضات على ما يشتري بمبلغ ٥ قروش لنقص ثمن الاثني عشرة بيضة ٦ مليات
- (١٦) طول قطعة أرض ٥٠ مترا وعرضها ٣٤ مترا وحولها طريق عرضه منتظم ومساحتها ٥٤٠ مترا مربعا فما عرض هذا الطريق
- (١٧) يمكن تبليط بهو (صاله) بمائتي بلاطة مربعة متساوية المساحة ولو زاد كل من طول البلاطة وعرضها سنتيمترا لزم للتبليط ١٢٨ بلاطة فقط فما طول البلاطة
- (١٨) في وسط حديقة مربعة قطعة أرض مربعة أيضا مزروعة فاكهة وحول هذه القطعة طريق مرصوف بالججارة الصغرى عرضه ٤ أمتار وحوله حافة من الأزهار عرضها ستة أمتار فإذا كان مسطح حافة الأزهار وقطعة الفاكهة معا ٧٢١ مترا مربعا فما مسطح قطعة الفاكهة وحدها
- (١٩) وجدت بائعة تفاح أنها إذا قصبت سعره مقدار  $\frac{1}{4}$  قرش في كل ١٢ تباع ٦٠ تفاحة زيادة على ما كانت تباعه قبل بثلاثين قرشا فبكم كانت تباع كل ١٢ تفاحة من قبل
- (٢٠) مستطيلان مساحة كل منهما ٤٨٠ مترا مربعا والفرق بين طوليهما ١٠ أمتار وبين عرضيهما ٤ أمتار فما طول كل من هذين المستطيلين
- (٢١) ما العدد المصور بين ١٠ ٦ ١٠٠ الذي إذا ضرب في رقمه الأيسر ينتج ٢٨٠ وإذا ضرب مجموع رقميه في ذلك الرقم نفسه ينتج ٥٥
- (٢٢) باع غنام قطيعا من الغنم بسعر الرأس ٣٧٥ قرشا وكان قد اشترى الرأس بسعر ٥٠ من القروش ووجد أنه كسب ٥٠ في المائة على المبلغ الذي دفعه في الشراء فما مقدار ٥٠
- (٢٣) اشتري تاجر عدة أمتار من قماش بمبلغ ٥ جنيهات لحفظ نفسه ٤ أمتار وباع الباقي بزيادة ١٠ قروش في المتر على ما دفعه فحصل على ١٣٠ قرشا زيادة على ما صرفه فكم مترا اشتري
- (٢٤) إذا استغرقت عربة محبته في كل دورة ثانوية زيادة في كل دورة تدورها عجلتها فان سرعتها تقل بمقدار  $\frac{1}{4}$  من الكيلومترات في الساعة فما سرعتها

(٢٥) اشتري سمسار أسهم سكة حديدية بمبلغ ١٨٧٥ جنيتها حفظ لنفسه ١٥ سهما منها وباع الباقي بمبلغ ١٧٤٠ جنيتها وبيع بذلك ٤ جنديات في كل سهم باعه فك سهما اشترى

(٢٦) قام قطاران في وقت واحد من محطتي ١ ٦ ب اللتين تبعد كل منهما عن الأخرى بمقدار ٣٠٠ كيلومتر فاصدا كل منهما المحطة الأخرى وبعد أن تقابلا وصل القطار القائم من أ محطة ب

بعد مضي تسع ساعات ووصل القائم من ب محطة أ بعد مضي ٤ ساعات فما سرعة كل منهما (٢٧) سار قطار أ من محطة ط إلى محطة د والمسافة بين المحطتين ٢٤٠ كيلومترا وكان يسير

بسرعة منتظمة وبعد ساعة قام قطار آخر ب من محطة ط ووصل بعد ساعتين إلى نقطة قد مر بها أ قبل ذلك بمقدار ٤٥ دقيقة ثم زادت سرعة القطار ب ٥ كيلومترات في الساعة فوصل القطاران محطة د في وقت واحد فما سرعة كل منهما في الابتداء

(٢٨) ملئ برميل ط بخسین لترا من الماء وبرميل د بأربعين لترا من الخلل ثم أخذ سه من اللترات من كل منهما غفلطت ثم ردت إلى البرميلين وكرر ذلك مرة أخرى فما مقدار سه

إذا صار مقدار الخلل في البرميل ط  $8\frac{7}{8}$  من اللترات بعد الخلط الثاني

(٢٩) أ ٦ ب فلاحان يملكان معا ٣٠ بقرة باع كل منهما بقراته بسعر غير الذي باع به الآخر ولكن مجموع الثمن واحد في الحالتين ولو باع أ بقراته بالسعر الذي باع به ب لبين مجموع ثمن بقراته

٣٢٠ جنيتها ولو باع ب بقراته بالسعر الذي باع به أ لبين مجموع ثمن بقراته ٢٤٥ جنيتها فك بقرة كان يملك كل منهما

(٣٠) أمر أحد الناس خادمه أن يحضره العربى وینظره بها على محطة السكة الحديدية القريبة من منزله في زمن معين ولكن هذا الرجل وصل إلى المحطة قبل الميعاد المحدد بساعة ونصف فلم

ينتظر العربى بل شرع في الحال يمشى فمشى بسرعة ٤ أميال في الساعة وقابل عربته بعد أن سارت ٨ أميال من الطريق فركبها ووصل بيته قبل الوقت الذى كان يتوقع الوصول فيه بساعة فما بعد المحطة عن المنزل وبأى سرعة كانت تسير عربته

(٣١) ط نقطة على المستقيم أ ب الذى طوله ٦ أوجد طول أ ط إذا كان أ ب ط = ط = أ ط<sup>٢</sup> وبين معنى كل من الجذرین الناتجين

(٣٢) إذا قسم مستقيم طوله ٦ سنتيمترات من الداخل بنقطة إلى جزأين بحيث يكون المستطيل المكون من المستقيم كله وأحد الجزأين يساوى مربع الجزء الآخر فالمطلوب إيجاد طول كل من هذين الجزأين مقربا لأقرب مليمترا

(٣٣) إذا مد المستقيم أ ب إلى نقطة ط بحيث كان أ ب أ ط = ط ب ط وكان

أ ب = ٨ سنتيمترات فما طول كل من أ ط ٦ ب ط مقربا لأقرب مليمترا

(٣٤) إذا قسم أى مستقيم مثل أ ب من الخارج بحيث كان أ ب أ ط = ط ب ط فاثبت

(أولا) أن  $أ^٢ + ب^٢ = ٣ ط^٢$

(ثانيا) أن  $(أ + ب ط)^٢ = ٥ ط^٢$

(٣٥) إذا مده المستقيم  $ا ب$  إلى نقطة  $ط$  بحيث يكون

$$\overline{ا ط} = \overline{ب ط} = ٢$$

وكان  $ا ب = ٣.٥$  من السنتيمترات فما طول  $ا ط$  مقربا لأقرب مليمتري

(٣٦) أوجد نقطة  $ط$  على المستقيم  $ا ب$  بحيث يكون

$$\overline{ا ط} = (\overline{ب ط} - \overline{ا ط})$$

وإذا كان  $ا ب = ٤.٢$  من السنتيمترات فما طول كل من  $ا ط$  و  $ب ط$  مقربا لأقرب

مليمتري وحقق المعادلة السابقة بوضع مقادير المستقيمتين بدلها

(٣٧) إقسم مستقيما طوله ١٣ سنتيمترا إلى جزأين بحيث تكون مساحة المستطيل المكون منهما

تساوى ٣٦ سنتيمترا مربعا

(٣٨) بين صحة حل التمرين السابق بالكيفية الآتية

أرسم نصف دائرة على الخط  $ا ب$  الذي طوله ١٣ سنتيمترا وأقم  $ا ط$  من نقطة  $ا$

عمودا على  $ا ب$  واجعل طوله ٦ سنتيمترات .

ثم أرسم من نقطة  $ط$  مستقيما  $ط د$  موازيا للمستقيم  $ا ب$  وقاطعا لنصف الدائرة

في النقطتين  $د$  و  $هـ$  ثم أرسم  $د س$  و  $هـ س$  موازيين على  $ا ب$  فتكون  $س أ$  و  $س ب$

نقطة التقسيم المطلوبة تحقق الناتج من الحل الجبري لسؤال ٣٧ بالقياس

(٣٩) حل المعادلات الآتية بالرسم البياني جاعلا وحدة القياس السنتيمتر ويراعي في الأجوبة أن تكون

الجنود مقربة لأقرب مليمتري

$$(١) \text{ سه } - (٧ - \text{ سه }) = ١٢ \quad (٣) \text{ سه } - ٦ + ٤ = ٠$$

$$(٢) \text{ سه } - ١١ + ٣٠ = ٠ \quad (٤) \text{ سه } + ١٣ = ٨$$

## الباب الثامن والعشرون - عوامل أصعب من السابقة

بند ٢١٠ - شرحنا في الباب السابع عشرة عدة قواعد لتحليل المقادير الجبرية إلى عواملها

وسيكون هذا الباب ممثلا له فنشرح فيه حالات أصعب من السابقة

بند ٢١١ - قد يمكن وضع بعض المقادير الجبرية على صورة الفرق بين مربعين بتغيير قليل

في تركيبها ثم تحلل بالطريقة المبينة بند ١٣٣

(مثال ١) لتحليل المقدار  $\text{سه}^٢ + \text{سه}٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢$  إلى عوامله

$$\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ = (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢) - (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢)$$

$$= (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢) - (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢)$$

$$= (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢) - (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢)$$

$$= (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢ + \text{سه}^٢) - (\text{سه}^٢ + \text{سه}^٢)$$

(مثال ٢) لتحليل المقدار  $س٤ - ١٥س٢ ص٢ + ٩ص٤$  إلى عوامله  
 نقول إن  $س٤ - ١٥س٢ ص٢ + ٩ص٤ = (س٢ - ٦س٢ ص٢ + ٩ص٤) - ٩س٢ ص٢$   
 $= (س٢ - ٣ص٢)² - (٣س٢ ص٢)²$   
 $= (س٢ - ٣ص٢ + ٣س٢ ص٢ - ٣س٢ ص٢ - ٣س٢ ص٢ + ٩ص٤) = (س٢ - ٣ص٢ - ٣س٢ ص٢ + ٩ص٤)$

بند ٢١٢ - المقادير التي يمكن وضعها على الصورة الآتية  $س٢ ± ٣س٢ ص٢ + ٩ص٤$  يمكن تحليلها إلى عواملها  
 لاتباع الطرق المستعملة في تحليل مجموع مكعبين أو الفرق بينهما (بند ١٣٦)

(مثال ١) لتحليل المقدار  $س٢٧ - \frac{٨}{٩}$  إلى عوامله  
 نقول إن  $س٢٧ - \frac{٨}{٩} = (س٢٧ - \frac{٢}{٩}) - (\frac{٢}{٩}) = (س٢٧ - \frac{٢}{٩}) - (\frac{٢}{٩})$

(مثال ٢) لتحليل المقدار  $س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢ + ٣س٢ - \frac{٨}{٩}$  إلى أربعة عوامل  
 نقول إن  $س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢ + ٣س٢ - \frac{٨}{٩} = (س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢) + (٣س٢ - \frac{٨}{٩}) = (س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢) + (٣س٢ - \frac{٨}{٩})$   
 $= (س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢) + (٣س٢ - \frac{٨}{٩}) = (س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢) + (٣س٢ - \frac{٨}{٩})$

$(س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢) + (٣س٢ - \frac{٨}{٩}) = (س٢ - \frac{٨}{٩}ص٢) + (٣س٢ - \frac{٨}{٩})$

(مثال ٣) لتحليل المقدار  $س٢٤ - ٦س٢ - ٦س٢ + ٦٤$  إلى ستة عوامل  
 نقول إن المقدار  $س٢٤ - ٦س٢ - ٦س٢ + ٦٤ = (س٢٤ - ٦س٢) - (٦س٢ - ٦٤)$   
 $= (س٢٤ - ٦س٢) - (٦س٢ - ٦٤) = (س٢٤ - ٦س٢) - (٦س٢ - ٦٤)$   
 $= (س٢٤ - ٦س٢) - (٦س٢ - ٦٤) = (س٢٤ - ٦س٢) - (٦س٢ - ٦٤)$   
 $= (س٢٤ - ٦س٢) - (٦س٢ - ٦٤) = (س٢٤ - ٦س٢) - (٦س٢ - ٦٤)$

(مثال ٤)  $١(١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢) = ١(١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢)$   
 $= ١(١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢) = ١(١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢) - (١ - س٢)$

(ملاحظة) في الأمثلة التي من قبيل هذا المثال الأخير يمكن معرفة معامل كل من  $س٦$  و  $ص٦$  في العاملين ذوي الحدين مباشرة بطريق التخمين ومتى وجدنا لا يبقى إلا معرفة ما إذا كانت هذان العاملان ينتجان معامل الحد الأوسط في المقدار الأصلي أم لا

بند ٢١٣ - رأينا من مثال (٢) بند ٥٢ أن خارج قسمة  $س٢٧ - ٢س٢ + ١٣س٢ ص٢ + ١$  على  $س٢ + ١$  هو  $س٢٧ - ٢س٢ - ١٣س٢ ص٢ + ١$  إذن  $س٢٧ - ٢س٢ + ١٣س٢ ص٢ + ١ = (س٢ + ١)(س٢٧ - ٢س٢ - ١٣س٢ ص٢ + ١)$





- (٢٣)  $٦٠ \text{ صه} - (١ + ٩) - (٤ \text{ صه} + ٩ \text{ صه})$   
 (٢٤)  $(٢٤ \text{ صه} + ١٢ \text{ صه}) + \text{صه} (٢٢ \text{ صه} + ٩٣ \text{ صه})$   
 (٢٥)  $(٢٥ \text{ صه} - ٩٣ \text{ صه}) + \text{صه} (٢٢ \text{ صه} - ٩٣ \text{ صه})$   
 (٢٦)  $(١ - ١) - (١ - ٩٣) + \text{صه} (١ + ١) - (١ + ١)$   
 (٢٧)  $٣ \text{ صه} - (١٤ + ٢٠) + \text{صه} (١٢ + ١٢)$   
 (٢٨)  $٢٢ \text{ صه} - ٢ (٣٤ - ٢٠) - (٢٠ - ٢٤) + ١٠ \text{ صه} - ٢٠$   
 (٢٩)  $(٩٣ + ١٣ - ٩٣) + \text{صه} (٢٢ - ٩٣ - ١٤ + ١) + (١ - ١)$   
 (٣٠)  $١ (١ + ١) + \text{صه} (١ + ١) - (٢٠ - ٢٠) - (١ - ٢٠)$   
 (٣١)  $٢٠ + ١ - ٢٠ + ١٠$   
 (٣٢)  $٩٣ + ١٠ + ٢٠ - ١٠$   
 (٣٣)  $٩٣ + ٢٠ + ٢٠ - ٢٠ - ١٠$   
 (٣٤)  $٩٣ - ٢٠ + ٢٠ + ٢٠ - ١٠$   
 (٣٥)  $٩٣ - ٢٠ - ٢٠ - ٢٠ - ١٠$   
 (٣٦)  $٩٣ + ٢٠ + ٢٠ - ٢٠ - ١٠$   
 (٣٧)  $\text{حل} \text{ صه} ٨١ + \text{صه} ٦٥٦١ \text{ إلى ثلاثة عوامل}$   
 (٣٨)  $\text{حل} (٩٣ - ٩٣ - ٩٣ - ٩٣) \text{ إلى أربعة عوامل}$   
 (٣٩)  $\text{حل} (٩٣ + ١٠) - (٩٣ + ١٠ - ٩٣ - ٩٣) \text{ إلى أربعة عوامل}$   
 (٤٠)  $\text{حل} \text{ صه} ٨ - \frac{١}{٢٥٦} \text{ إلى أربعة عوامل}$   
 (٤١)  $\text{حل} \text{ صه} ١٦ - \text{صه} ١٦ \text{ إلى خمسة عوامل}$   
 (٤٢)  $\text{حل} \text{ صه} ١٨ - \text{صه} ١٨ \text{ إلى ستة عوامل}$

حلل كلام من المقادير الآتية إلى أربعة عوامل

$$\begin{array}{l|l}
 (٤٦) \quad \frac{٩٩}{٤} - \frac{٢٤}{٩} + ١٠ - ١٤ & (٤٣) \quad \frac{٩}{٢} - ٨ - \text{صه} ٨ - \text{صه} ٨ \\
 (٤٧) \quad \frac{٩}{٤} + \frac{١}{٩} - \frac{٢٤}{٢٢} - \frac{٢٤}{٧٢} & (٤٤) \quad \frac{٩}{٢} + \text{صه} ٨ - \text{صه} ٨ - \text{صه} ٨ \\
 (٤٨) \quad \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٩} + \frac{٢}{٢٥} - \text{صه} ٢٥ & (٤٥) \quad \frac{٩}{٢} + \text{صه} ٦٤ + \text{صه} ٦٤ + \text{صه} ٦٤
 \end{array}$$

حلل كلام من المقادير الآتية إلى خمسة عوامل

$$(٤٩) \quad \text{صه} ٧ + \text{صه} ١٦ - \text{صه} ١٦ - \text{صه} ٨١ - \text{صه} ١٦ + ٧١ \quad | \quad (٥٠) \quad \text{صه} ١٦ - \text{صه} ١٦ - \text{صه} ٨١ - \text{صه} ١٦ + ٧١$$

بند ٢١٤ - يمكن غالباً الاستغناء عن إجراء عمليات الضرب أو القسمة كلها أو بعضها وإيجاد الناتج باستعمال العوامل

وعلى نازم ملاحظة أن القوانين التي طبقناها في الأمثلة المتقدمة لا تقتصر فائدتها على استعمالها في إيجاد العوامل متى علمت المقادير بل قد تستعمل أيضاً في عكس ذلك بمعنى أن قانون تحليل فوق مربعين إلى عاملين مثلاً يستعمل أيضاً في إيجاد حاصل ضرب مجموع كيتين في فرقهما

(مثال ١) \* لضرب  $١٢ + ٣ - ٥$  في  $١٢ - ٣ + ٥$

نقول إنه يمكن ترتيب المقدار هكذا

$$١٢ + (٣ - ٥) (١٢ - (٣ - ٥))$$

إذن حاصل الضرب

$$\{ ١٢ + (٣ - ٥) \} \{ ١٢ - (٣ - ٥) \} =$$

$$(بند ١٣٣) \quad ١٢ - (٣ - ٥) =$$

$$= ١٤ - (٣ - ٥) =$$

$$= ١٤ - ٣ + ٥ = ١٦$$

(مثال ٢) لضرب  $(١٢ + ٣ + ٥)$  في  $(١ - ٣ - ٥)$

نقول إن حاصل الضرب

$$\{ (١٢ + ٣ + ٥) - (١ - ٣) \} \{ (١ - ٣) - (١ - ٣) \} =$$

$$= (١٢ - ٣) - (١ - ٣) =$$

$$= ١٢ - ٣ + ١ - ٣ =$$

$$= ١٠ - ٣ = ٧$$

(ملاحظة) حاصل ضرب  $١٢ + ٣ + ٥$  هو  $١٦$  و  $١٢ - ٣ + ٥$  هو  $١٤$

ويلبى أن يتذكر الطالب هذا الحاصل حتى يمكنه أن يكتبه مباشرة بدون إجراء عملية الضرب

(مثال ٣) لضرب  $(٣ + ٢ - ٣)$  في  $(٣ - ٢ - ٣)$

في  $(٣ + ٢ - ٣)$

نقول إن المقدار (١)

$$= (٣ + ٢ - ٣) - (٣ - ٢ - ٣) =$$

$$= (٣ - ٢) - (٣ - ٢) =$$

$$= ١٢ - (٣ - ٢) =$$

وإن المقدار (٢)

$$= (٣ + ٢ - ٣) - (٣ - ٢ - ٣) =$$

$$= (٣ - ٢) - (٣ - ٢) =$$

$$= ١٢ - (٣ - ٢) =$$

مخاض الضرب اذنت

$$12 = 12 \text{ سر } (1 - 2 \text{ سر}) \times 12 \text{ سر } (1 + 2 \text{ سر})$$

$$= 144 \text{ سر } (1 - 4 \text{ سر})$$

(مثال ٤) لقسمه حاصل ضرب ٢ سر + سر - ٦ سر في ٦ سر - ٥ سر + ١ سر على ٣ سر + ٥ سر - ٢ سر  
نقول إنه بوضع المقسوم والمقسوم عليه في صورة كسر نرى أن الخارج

$$= \frac{(2 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 2) (6 \text{ سر} - 5 \text{ سر} + 1)}{3 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 2}$$

$$= \frac{(2 \text{ سر} - 2) (3 \text{ سر} - 5 \text{ سر} + 1) (2 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 2)}{(3 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 2)}$$

$$= (2 \text{ سر} - 2) (3 \text{ سر} - 5 \text{ سر} + 1)$$

(مثال ٥) للبرهنة على أن (٢ سر + ٣ سر - ٤) + (٣ سر + ٧ سر + ٤) = ٢ سر  
يقبل القسمة على ٥ (سر + ٢ سر)

نقول إن المقدار من قبيل

فيكون

$$(2 \text{ سر} + 3 \text{ سر} - 4) + (3 \text{ سر} + 7 \text{ سر} + 4) = 2 \text{ سر} \text{ يقبل القسمة على } 5$$

$$(2 \text{ سر} + 3 \text{ سر} - 4) + (3 \text{ سر} + 7 \text{ سر} + 4) = 2 \text{ سر}$$

$$5 \text{ سر} + 10 \text{ سر}$$

$$5 \text{ سر} (2 \text{ سر} + 2 \text{ سر})$$

(مثال ٦) لايجاد خارج قسمة

$$12 + 8 - 5 = 5 \text{ سر } (16 - 20) \text{ على } 1 - 5 + 2$$

نقول إن المقدار

$$= 12 + 8 - 5 = 5 \text{ سر } (16 - 20)$$

$$= (2 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 1) \times 1 \times 3 - (2 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 1) \times 2$$

$$= (2 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 1) \times (2 \text{ سر} + 5 \text{ سر} - 1) + 4 \text{ سر} + 10 \text{ سر} + 1 = [213]$$

$$10 + 12 - 10 + 4 + 20 + 1 = 2 \text{ سر } (16 - 20) \text{ على } 1 - 5 + 2$$

(مثال ٧) إذا كان سر + سر = ١ و سر - سر = ٥

$$4 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر} = (4 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر}) = 4 \text{ سر} - 4 \text{ سر}$$

لذلك نقول إن

$$6 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر} = (6 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر}) = 2 \text{ سر} - 4 \text{ سر}$$

$$= (6 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر}) = 2 \text{ سر} - 4 \text{ سر}$$

$$= (6 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر}) = 2 \text{ سر} - 4 \text{ سر}$$

$$= (6 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر}) = 2 \text{ سر} - 4 \text{ سر}$$

$$= 4 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر} = (4 \text{ سر} - 6 \text{ سر} + 2 \text{ سر}) = 4 \text{ سر} - 4 \text{ سر}$$



(۳۰) اقسام ۱ - ۲ علی حاصل ضرب ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰

(۳۱) اقسام (۳ - ۳۳ ص) - (۳ - ۳۲ ص) علی (۳ - ۳۳ ص)

(۲۲) اقسام (سہ - ص ۷) + ۸ ص ۲ ع ۲ علی سہ ۲ + ص ۷ ع

(۳۳) اقسام ۱۸ سے ص ۱ + ۲۷ - ۲ ص ۸ - ۱ ص ۲ علی ۳ + ۱ - ۲ ص

(۳۴) اقسام (۲) ۳ + ۲ - ۱ = (۲ + ۳ + ۴ + ۵) + ۲ - ۱ = ۱۱

(٣٥) إقسم حاصل ضرب  $٦٢٢ - ١٨١ + ١٤$  على  $١٣٣ - ١٥٠ + ٨$

(۳۶) اقسام حاصل ضرب  $س^۲ + (۱ - ب)س - ۱$  سے  $۱ - (۱ - ب)س - ۱$  سے  $س^۲ + (۱ + ب)س + ۱$  سے

(۳۷) اقسام ۱ - ۸ ص ۲ - ۹ ص (۴ + ۲ ص) علی ۱ - ۳ ص - ۲ ص

(۳۸) اقسام ۲۷ - ۸<sup>۳</sup> - ۶۴<sup>۴</sup> - ۷۲<sup>۵</sup> صہ علی ۳ - ۲ (صہ + ۲ صہ)

(٣٩) بين أن  $(2 - 3 + 1) - (1 + 3 - 2) = 1$  يقبل القسمة على ٥. (٥ - ٥)

(٤٠) بين أن مربع  $s$  + ١ يقسم  $(s^3 + s^2 + ٤) - (s^3 - ٢s + ٣)$  بقسمة صحيحة

(٤١) يبين أن  $s^2 + t^2$  عامل القدار  $(s + a + b + 1) - (s - a + b - 1)$

(٤٢) بين أن  $(٢ + \sqrt{٧} + \sqrt{٣}) - (٢ - \sqrt{٧} + \sqrt{٣})$  يقبل القسمة على كل من المقادير  $٢$  و  $٣$  و  $٦$

(٤٣) بين أن  $({}^2_7 + {}^3_3 - {}^2_4) + ({}^3_5 - {}^2_4 - {}^3_2) = 1$  يقبل القسمة على ٢  
كل من المقدارين ٤ - ٣ و ٣ - ٢

(٤٤) يتن أن مجموع مكعبى المقدارين

٢ - ٥ - ٩ - ٦ + ٦ - ٥ - ٥ يقبل القسمة على حاصل ضرب  
٣ - ٧ في ٢ - ٢

(٤٥) إذا كان  $m + n = 6$   $m - n = 2$  فاكتب قيمة  $m^2 + n^2$   
بدلالة المقدارين  $m$  و  $n$

(٤٦) إذا كان  $s + s = m$  و  $s - s = u$  فينبئ أن

$$(r - r_0)(v - v_0) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r}{v} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) 16$$

(٤٧) أوجد قيمة  $س^٤ + س^٣ + س^٢ + س$

إذا كان  $u = 6$   $u = 6$   $u = 6$

(٤٨) إذا كان  $u + v = 6$   $u - v = 2$

فبرهن على أن  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(٤٩) أوجد قيمة  $s - ٤٧ + s + s$  بدلالة المقدار

(١) أوجد:

(۵۰) اوجد قيمة  
إذا كان

## الباب التاسع والعشرون - نظريات وأمثلة متنوعة

بند ٢١٥ - قد يصادف المتعلم مسائل على القواعد البسيطة كالقسمة والعامل المشترك الأعلى واستخراج الجذور، ولم جرا لا يمكن حلها خلا مختصراً موافقاً إلا باستعمال العوامل والمقادير المركبة ولم نذكر مثل هذه المسائل إلى الآن حتى يثق الطالب بنفسه باتساع معلوماته وكثرة تمرنه . وسيكون موضوع هذا الباب حل عدة تمارين متنوعة غالباً ليس بجديد من حيث القواعد التي يستلزمها حلها وإنما يحتاج إلى شيء من المهارة والفتنة . ولذا فإن هذا الباب نافع لا عادة ما تقدم في الأبواب السابقة

$$\begin{array}{r}
 \text{(مثال ١) لقسمه ١ سره} - (١ ط - ٢ سره) + (١ ق - ٢ ط - ٢ سره) \\
 + (٢ ق + ٢ ط) سره - ٢ ق على ١ سره + ٢ سره - ٢ سره نجري العمل هكذا \\
 ١ سره - (١ ط - ٢ سره) + (١ ق - ٢ ط - ٢ سره) + ٢ ق + ٢ ط سره - ٢ سره \\
 ١ سره + ٢ سره - ٢ سره \\
 \hline
 ١ ط سره - (١ ق - ٢ ط - ٢ سره) + ٢ ق + ٢ ط سره \\
 ١ ط سره - ٢ ط سره + ٢ ط سره \\
 \hline
 ١ ق سره + ٢ ق سره - ٢ سره \\
 ١ ق سره + ٢ ق سره - ٢ سره
 \end{array}$$

(ملاحظة) إذا كانت المعاملات في المقسوم أو المقسوم عليه مقادير مركبة فالأفضل أن تبقى محصورة بين الأقواس أثناء العمل كله

بند ٢١٦ - علمنا من طريقة إيجاد العامل المشترك الأعلى وهي المدونة بالباب الثامن عشر أن كل باقي للقسمه يتبع أثناء العمل يحتوي على العامل المراد استخراجه فإذا تيسر أثناء العملية أن نحصل أحد البواقي إلى عوامله أمكن اختصار العمل غالباً

(مثال ١) لإيجاد العامل المشترك الأعلى للقدارين

$$\begin{array}{r}
 ٢ سره - (١٤ - ٢٣) سره + ٢ (٢ - ١٠) سره + ٢٩ سره \\
 ٢ سره + (١٢ + ٢٣) سره + ٢ (١٣ - ٢٤) سره - ٢٦ سره \\
 \hline
 ٢ سره + (١٢ + ٢٣) سره + ٢ (١٣ - ٢٤) سره - ٢٦ سره \\
 ٢ سره + (١٢ + ٢٣) سره + ٢ (١٣ - ٢٤) سره - ٢٦ سره \\
 \hline
 ٢ سره + (١٢ + ٢٣) سره + ٢ (١٣ - ٢٤) سره - ٢٦ سره
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{نرى أن الباقي} = ١٦ سره + ١٩ سره - ١٠ سره - ١٥ سره \\
 = ١٣ سره (٢ سره + ٢ سره) - ٥ سره (٢ سره + ٢ سره) \\
 = (٢ سره + ٢ سره) (١٣ سره - ٥ سره)
 \end{array}$$

وبديهي أن ١٣ سر - ٥ ب ليس بعامل مشترك فيقطع النظر عنه فلو كان بين المقدارين إذن عامل مشترك فلا بد من أن يكون ٢ سر + ٣ ب وبقسمة كل من المقدارين على هذا العامل أو باتباع الطريقة الموضحة ببند ١٥٢ نرى أن ٢ سر + ٣ ب عامل لكل منهما فالعامل المشترك الأعلى إذن

$$٢ سر + ٣ ب$$

(مثال ٢) ما العامل المشترك الأعلى للمقدارين

$$١ + ٢ (١٢ - ١) سر + ٢ (١ - ١٢) سر - ١ + ٢$$

$$٦ (٢ - ١ - ١) سر + ٢ (١ + ١٤) سر - ١ - ٢$$

نقول إنه يمكن تحليل كل من المقدارين إلى عوامله بالطريقة المذكورة في بند ٢١٢ مثال (٤) هكذا

$$١ + ٢ (١٢ - ١) سر + ٢ (١ - ١٢) سر - ١ + ٢$$

$$١ = (١ - ١) (٢ - ١) سر + ٢ (١ - ١٢) سر - ١ + ٢ (١ + ١) (١ - ١)$$

$$= \{ (١ - ١) - ١ سر \} \{ (١ + ١) + ٢ سر \}$$

$$٦ (٢ - ١ - ١) سر + ٢ (١ + ١٤) سر - ١ - ٢$$

$$= (١ + ١) (٢ - ١) سر + ٢ (١ + ١٤) سر - ١ + ٢ (١ + ١)$$

$$= \{ (١ + ١) + ٢ سر \} \{ (١ + ١) - ١ سر \}$$

$$١ + ٢ (١ - ١) سر + ٢ (٢ - ١) سر$$

(تمارين ١٢٩)

أقسم

$$(١) سر + ٢ (١ + ٣ + ١) سر + ٢ (٣ + ١ + ١) سر + ١ ب$$

$$\text{على } (١ + ٣) سر + ١ ب$$

$$(٢) سر - ٢ (١ + ٥) سر + ٢ (٤ + ١٥ + ٣) سر - ٢ (٤ + ٥ + ٣) سر + ٤ ب$$

$$\text{على } سر - ٥ سر + ٤ ب$$

$$(٣) سر - ٢ (١ - ١) سر - (٣ + ١) سر + ٢ (١٢ + ١) سر - ١ ب$$

$$(٤) سر - ٢ (٣ + ١) سر + ٢ (٣ + ١) سر - ٢ (٣ + ١) سر + ٢ (٣ + ١) سر - ١ ب$$

$$(٥) سر - ٢ (٣ + ١) سر + ٢ (٣ + ١) سر - ٢ (٣ + ١) سر + ٢ (٣ + ١) سر - ١ ب$$

$$(٦) ١ (١ - ١) سر + ٢ (١ - ١) سر + ٢ (١ - ١) سر + ٢ (١ - ١) سر + ٢ (١ - ١) سر - ١ ب$$

$$(٧) سر + ٢ (١ + ٣) سر + ٢ (١ + ٣) سر + ٢ (١ + ٣) سر + ٢ (١ + ٣) سر - ١ ب$$

$$\text{على } سر + ١ سر + ١ ب$$

$$(٨) ٢ (٢ - ٢) سر - ٢ (٢ - ٢) سر + ٢ (٢ - ٢) سر - ٢ (٢ - ٢) سر - ١ ب$$

$$\text{على } ٢ (٢ - ٢) سر + ٢ (٢ - ٢) سر$$

$$(٩) (١ + ٢) سر - ٢ (١ + ٢) سر - ٢ (١ + ٢) سر - ٢ (١ + ٢) سر - ١ ب$$

$$\text{على } (١ - ١) سر - ١ ب$$



$$(١٠) \quad ٢ - (١ - ٣ - ٢) - (١ + ١٢ - ٣) - ٢ - ١٢$$

على (٢ - ١) (٢ + ٢)

$$(١١) \quad ١ + (١ + ٢) + (١ + ٢) + (١ + ٢) + (١ + ٢) + ٢ + ٢ + ٢ + ٢$$

$$(١٢) \quad (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢)$$

استخرج العامل المشترك الأعلى للقادير الآتية

$$(١٣) \quad (١ - ٢) (٢ + ٢ - ٢) + (١ - ٢) (٢ + ٢ - ٢) + (١ - ٢) (٢ + ٢ - ٢)$$

$$(١٤) \quad ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢)$$

$$(١٥) \quad ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢)$$

$$(١٦) \quad ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢)$$

$$(١٧) \quad ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢)$$

$$(١٨) \quad ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢)$$

استخرج المضاعف المشترك البسيط للقادير الآتية

$$(١٩) \quad ٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢ - ٢$$

$$(٢٠) \quad ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢) + ٢ (٢ - ٢)$$

$$(٢١) \quad (١ + ١) (١ + ١) (١ + ١) (١ + ١) (١ + ١) (١ + ١) (١ + ١) (١ + ١)$$

بند ٢١٧ - نذكر الآن بعض أمثلة متنوعة في استخراج الجذور

يستخرج الجذر الرابع لأي مقدار باستخراج الجذر التربيعي لجذره التربيعي

وبإجراء عملية الجذر التربيعي عدة مرات متوالية يستخرج الجذر الثامن والسادس عشر وهلم جرا  
أما الجذر السادس فيستخرج بأخذ الجذر التكعيبي للجذر التربيعي أو بأخذ الجذر التربيعي للجذر التكعيبي  
وهذه الصفة أي بالجمع بين عمليتي استخراج الجذر التربيعي والتكعيبي تستخرج بعض جذور أخرى  
أعلى مما ذكر

(مثال ١) لإيجاد الجذر الرابع للقدر

$$٨١ \text{ سر}^٤ - ٢١٦ \text{ سر}^٣ + ٢١٦ \text{ سر}^٢ - ٩٦ \text{ سر} + ١٦ \text{ سر}^٢$$

نستخرج الجذر التربيعي بواسطة القاعدة المألوفة فنجد أنه

$$٩ \text{ سر}^٢ - ١٢ \text{ سر} + ٤ \text{ سر}^٢$$

وبأخذ الجذر التربيعي لهذا المقدار الأخير ينتج ٣ سر - ٢ سر وهو الجذر الرابع المطلوب

(مثال ٢) لإيجاد الجذر السادس للقدر

$$\left( \text{سر}^٢ - \frac{١}{٢} \right) - \left( \text{سر}^٢ - \frac{١}{٢} \right) \left( \frac{١}{٢} - \text{سر} \right) + ٩ \left( \frac{١}{٢} - \text{سر} \right)$$

نقول إنه يجوز النظر نرى أن الجذر التربيعي لهذا المقدار

$$\left( \text{سر}^٢ - \frac{١}{٢} \right) - ٣ \left( \frac{١}{٢} - \text{سر} \right)$$

$$\text{سر}^٢ - ٣ \text{ سر} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$$

وهذا يساوي

$$\text{سر} - \frac{١}{٢}$$

والجذر التكعيبي لهذا المقدار الأخير

وهو الجذر السادس المطلوب

بند ٢١٨ - ذكرنا في الباب السادس بعض أمثلة على القسمة غير الصحيحة وعلى مثل ما ذكر هناك يمكن إيجاد أى عدد من الحدود عند استخراج جذر أى مقدار جبرى غير مربع كامل كان أو غير مكعب كامل

(مثال) لاستخراج الجذر التربيعي للقدر ١ + ٢ سر - ٢ سر + ٢ سر بحيث يشتمل ناتج الجذر

على أربعة حدود بحرى العمل هكذا

$$١ + ٢ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} + ٢ \text{ سر} \quad \left| \quad ١ + ٢ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} + ٢ \text{ سر} \right.$$

١

$$\begin{array}{r} ٢ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} \\ ٢ \text{ سر} + ٢ \text{ سر} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} \\ ٢ \text{ سر} + ٢ \text{ سر} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} \\ ٢ \text{ سر} + ٢ \text{ سر} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} \\ ٢ \text{ سر} + ٢ \text{ سر} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ \text{ سر} - ٢ \text{ سر} \\ ٢ \text{ سر} + ٢ \text{ سر} \end{array}$$

فناجى الجذر المطلوب إذن

بند ٢١٩ - أوضحنا في بند ١٢٤ وجه الشبه بين الطرق الجبرية والطرق الحسابية المستعملة في استخراج الجذر التربيعي والجذر التكعيبي وسنبرهن الآن أنه في استخراج الجذر التربيعي أو التكعيبي لأي عدد يمكننا بعد استخراج عدة أرقام من الجذر المطلوب بالطريقة المعتادة أن نستخرج عددا آخر من أرقام الجذر يعادل تقريبا عدد الأرقام التي استخرجناها وذلك بإجراء عملية التسمية العادية

بند ٢٢٠ - إذا تركب الجذر التربيعي لعدد ما من  $٢ + ١$  من الأرقام واستخرج منها  $(١ + ١)$  من الأرقام بالطريقة المعتادة فإنه يمكن الحصول على الأرقام الباقية التي عددها  $٥$  بطريقة القسمة

ليكن العدد المراد أخذ جذره  $٥$  وليكن  $١$  جزء الجذر التربيعي الذي أوجد بالطريقة المعتادة أي الجزء المركب من  $٥ + ١$  من الأرقام متبوعة بأصفار عددها  $٥$  وليكن  $س$  الجزء الباقى من الجذر

$$\begin{aligned} ٥ + ١ &= ٦ \\ ٥ + ١ + ١٢ + س &= ٦ \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{٥ - ١}{١٢} = س + \frac{٢١ - ١}{١٢} \quad \therefore (١) \dots \dots \dots$$

ومعلوم أن  $٥ - ١$  هو الباقي بعد استخراج  $٥ + ١$  من أرقام الجذر أي بعد استخراج الجزء الذي رمزنا له بالحرف  $١$  وأيضا  $١٢$  هو المقسوم عليه في عملية الجذر وقتئذ ، ونرى في المعادلة (١) أن خارج قسمة  $٥ - ١$  على  $١٢$  هو  $س$  وهو عبارة عن الجزء الباقي من الجذر مضافا إليه  $\frac{٢١}{١٢}$  وسنبين الآن أن  $\frac{٢١}{١٢}$  كسر حقيقي وحيث أننا نقطع النظر عن الباقي من القسمة الذي هو هذا الكسر لنحصل على مقدار  $س$  وهو الجزء الباقي من الجذر ولا يثبت أن  $\frac{٢١}{١٢}$  كسر حقيقي قول

لكون  $س$  مركبا من  $٥$  من الأرقام فربعه يشتمل على  $٢٠$  من الأرقام على الأكثر ومعلوم أن  $١$  عدد مركب من  $٢ + ١$  من الأرقام (  $٥$  الأخيرة منها أصفار ) فيكون حينئذ عدد أرقام  $١٢$  هو  $٢ + ١$  على الأقل وعلى ذلك يكون  $\frac{٢١}{١٢}$  كسرا حقيقيا

ولو وضعنا بدل  $٥$  الواحد الصحيح في البرهان المتقدم لاستنتجنا أنه يلزم استخراج رقمين على الأقل بالطريقة المعروفة لأخذ الجذور لكي يكون الرقم التالى الذى نستخرجه بواسطة القسمة مضبوطا

(مثال) لاستخراج الجذر التربيعي للعدد ٢٩٠ حتى يكون في الجزء العشري من الناتج خمسة أرقام نجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٢٩٠ \\ \hline ١٧,٠٢ \\ \hline ١ \\ ٢٧ \overline{) ١٩٠} \\ \underline{١٨٩} \\ ٣٤٠٢ \\ \hline ١٠٠٠٠ \\ \underline{٦٨٠٤} \\ ٣١٩٦ \end{array}$$

حصلنا الآن بالطريقة المعتادة على أربعة أرقام من ناتج الجذر ويمكن الحصول على ثلاثة أرقام أخرى بطريقة القسمة فقط وذلك يجعل المقسوم عليه  $2 \times 170.2$  أى  $340.4$  والمقسوم  $3196$  باعتبار أن  $3196$  باق

$$\begin{array}{r} 31960 \\ 3404 \overline{) 938} \\ \underline{13240} \\ 10212 \\ \underline{30280} \\ 27232 \\ \underline{3048} \end{array}$$

إذن  $170.2938 = \sqrt{2907}$  مشتملا على خمسة أرقام عشرية  
وإذا اشتمل المقسوم عليه على عدة أرقام يحسن استعمال طريقة القسمة المختصرة  
وهنا يلاحظ أيضا أننا في استخراج الرقم الثاني من الجذر قسمنا  $190$  على  $20$  ووجدنا أن  $9$  وهى  
الناتج أكبر من المطلوب فأخذنا بدلها الرقم  $7$  لظهور مواقفته بالتجربة  
وهذه الملاحظة (التجربة فى عملية الجذر) هى إحدى النقاط التى تخالف فيها الطريقة الحسابية  
الطريقة الجبرية لاستخراج الجذور والى أشرنا إليها فى بند  $124$

بند  $221 -$  إذا تركب الجذر التكعيبي لأى عدد من  $2 + 2$  من الأرقام واستخرج منها  
 $2 + 2$  من الأرقام بالطريقة المعروفة يمكن الحصول على الأرقام الباقية وهى  $2$  بالقسمة  
ليكن العدد المراد أخذه جذره  $2$  وليكن  $1$  جزء الجذر التكعيبي الذى استخرج بالطريقة  
المعتادة وهو المركب من  $2 + 2$  من الأرقام متبوعة بأصفار عددها  $2$  وليكن  $س$  الجزء الباقى من  
الجذر التكعيبي

$$\begin{aligned} \text{إذن} \quad \sqrt[3]{22} &= 2 + س \\ \therefore \quad 2 + س &= \sqrt[3]{22} \\ \therefore \quad 2 + س &= \sqrt[3]{22} \end{aligned}$$

نعلم أن  $2 - 1$  هو الباقي بعد استخراج  $2 + 2$  من الأرقام فى الجذر وهو الجزء المرموز له  
بالحرف  $1$  وأيضا  $2$  هو المقسوم عليه فى العملية وقتئذ ونرى من المعادلة (1) أن خارج قسمة  
 $2 - 1$  على  $2$  هو  $س$  وهو الجزء الباقى من الجذر مضافا إليه  $\frac{س}{1} + \frac{س}{2}$  وسنبين الآن أن هذا  
المقدار الأخير كسر حقيقى وحيث أننا يمكننا أن نقطع النظر عن الباقي من القسمة وهو هذا المقدار ونحصل  
على مقدار  $س$  وهو الجزء الباقى من الجذر ولاشبات أن  $\frac{س}{1} + \frac{س}{2}$  كسر حقيقى تقول

$$1 + \vartheta_1^2 < 16 \quad \vartheta_1 > \sim$$

•

6

فاذن

(نمبر ۲۹ ب)

$$28.1 + \sim 1372 - \sim 298 + \sim 28 - \sim (1)$$

$$\sim \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \sim \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \sim \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \sim \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \sim \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\overset{\wedge}{\sim} + \overset{\vee}{\sim} \xi - \overset{\vee}{\sim} \gamma + \overset{\circ}{\sim} \lambda + \overset{\varepsilon}{\sim} \circ - \overset{\vee}{\sim} \lambda - \overset{\vee}{\sim} \gamma + \overset{\sim}{\sim} \xi + 1 (\xi)$$

$$\sim^1 + \sim^2 \wedge - \sim^3 \vee + \sim^4 \wedge - \sim^5 \vee - \sim^6 \wedge + \sim^7 \vee + \sim^8 \wedge + 1 \quad (5)$$

$$1 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 + 34 + 38 + 42 + 46 + 50 + 54 + 58 + 62 + 66 + 70 + 74 + 78 + 82 + 86 + 90 + 94 + 98 + 100 = 5050 \quad (6)$$

$$^1 74 + ^2 116 - ^3 170 + ^4 192 - ^5 124 + ^6 112 - ^7 \quad (v)$$

$$2 \times 1408 - 2 \times 1310 + 2 \times 1040 - 2 \times 1130 + 2 \times 118 - 1 \times (1) \\ 2 \times 729 +$$

$$^1\text{ص} + ^2\text{ص} - ^3\text{ص} + ^4\text{ص} - ^5\text{ص} \quad (9)$$

$$^A_{\sim} + ^V_{\sim} \sim 1 - ^I_{\sim} \sim 28 + ^O_{\sim} \sim 56 -$$

$$\{1 + \frac{1}{2}(1-p)^2 - \frac{1}{2}(1-p)^2 - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p)^2 + \frac{1}{2}\} (1.0)$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2} (10) \quad \left| \quad \frac{u}{v} = \frac{1}{2} (11) \right.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (17)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & - & 3 \text{ سم} \quad (17) \\ 1 & + & 12 \text{ سم} \quad (18) \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 1 \quad (22) \quad \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (19)$$

$$\sim 18 - \sim 27 - \sim 27 \text{ (22)} \quad \sim + 1 \text{ (20)}$$

$$\sim 9 + \sim 28 - 72 (22) \quad \sim 9 + \frac{1}{n} (21)$$

## المتطابقات والتغيرات

بند ٢٢٢ - تعريف : كل متساوية جبرية تصح باى مقادير تعطى للحروف الداخلة فيها تسمى متطابقة

$$(أمثلة) \quad (٢ + ١ - ٢) (١ + ١) = ٣ + ٢$$

$$\begin{aligned} & \text{سه} + \text{صه} + \text{عه} - \text{سه} - \text{صه} - \text{عه} = \text{سه} + \text{صه} + \text{عه} - \text{سه} - \text{صه} - \text{عه} \\ & \text{سه} + \text{صه} + \text{عه} - \text{سه} - \text{صه} - \text{عه} = \text{سه} + \text{صه} + \text{عه} - \text{سه} - \text{صه} - \text{عه} \end{aligned}$$

بند ٢٢٣ - طرفا المتطابقة متساويان دائما والبرهان على تساويهما يسمى إثبات المتطابقة وكيفية الإثبات أن ينتخب أحد الطرفين ثم يبرهن أنه يمكن تحويله إلى صورة الطرف الآخر وذلك بإدخال عدة تغييرات متتابة عليه

(مثال ١) للبرهنة على أن

$$١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = (ب - ا)١ + (١ - ا)(ا - ب)$$

نقول إن الطرف الأول

$$\begin{aligned} & ١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = \\ & ١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = \\ & \{ (١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) \} = \\ & \{ (١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) \} = \\ & \{ (١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) \} = \\ & (١ - ا)(ب - ا) = \\ & (١ - ا)(ب - ا) = \end{aligned}$$

ويحصل على الناتج الأخير بتغيير العلامتين في العامل ١ - ا للحفاظ على الترتيب الدائرى (راجع

بند ٢٢٩ مثال ٣)

ولكون المقدار الذى فى الطرف الأيمن من المتطابقة السابقة يمكن وضعه على الصورتين الآتيتين

$$\begin{aligned} & ١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = \\ & ١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك ماآتى

$$\begin{aligned} & ١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = (ب - ا)١ + (١ - ا)(ا - ب) \\ & ١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = (ب - ا)١ + (١ - ا)(ا - ب) \\ & ١(١ - ا) + (ا - ب)(ب - ا) = (ب - ا)١ + (١ - ا)(ا - ب) \end{aligned}$$

ولكون هذه المتطابقات كثيرة الاستعمال ينبغى الالتفات إليها على الخصوص وبذلكها جيدا

$$\frac{x^3 + 1}{(x-2)(x-1)(x+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$
$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2-d} \right] + \left[ \frac{1}{2-d} + \frac{1}{1-d} \right] =$$

$$\frac{2+2-2}{(2-2)2} + \frac{1-2+0-2}{(0-2)(1-2)} =$$

$$\frac{p}{(p-1)z} + \frac{u-1-2r}{(u-1)(1-z)} =$$

$$\frac{p}{(p-z)z} + \frac{p}{(u-z)(1-z)} =$$

$$\left\{ \frac{(u-z)(1-z) + (p-z)z}{(p-z)(u-z)(1-z)z} \right\}^p =$$

$$\frac{\{1+20-21-2+29-2\}}{(9-2)(0-2)(1-2)2}$$

$$\frac{\{u + (p+u+1)z - \{z\}z\}^p}{(p-z)(u-z)(1-z)z} =$$

$$\frac{p+1}{(p-2)(p-1)(1-2)p} =$$

لأن  ${}^2Z_2 = Z_2 \times Z_2 = (2+2+1)Z$

(ملاحظة) نرى في المثال المتقدم أن استعمالنا ٢ هـ بدل ١ + ٢ + ٣ من المستحسن واستبقاء هـ أثناء العمل وإرجاء وضع قيمتها مما يسهل العمل ويساعد على اختصاره ولذا فانا ننبه الطالب في حل مثل هذا التمرين إلى أن لا ينجل في تعويض الحروف الموضوعة رمزا المقادير بل يوالى استعمالها حتى يضطره الحل إلى وضع مقاديرها بها

(مثال ۳) إذا كانت

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}) \cdot 2 = 1 + \frac{1}{2}$$

فَالْبُرْهَانُ عَلَى أَنْ      م = م = م = ع = ع

تقول إنه بالنقل يحدث أن

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ای ان  $= (ع - غ) + (ص - ع) + (ز - ص)$

ولكون مربع أى كمية يلزم أن يكون موجبا دائما فكل من المقادير

(س - ص) 6 (ص - ع) 6 (ع - ٤) 6 موجب

ولا يتأتى إذن أن يكون حاصل جمع ثلاثة المربعات صفرا إلا اذا كان كل منها على افراد يساوى الصفر

$$\therefore \text{س} - \text{صه} = 0 \quad 6 \text{ صه} - \text{ع} = 0 \quad 6 \text{ ع} - \text{س} = 0$$

أو  
 $\text{س} = \text{صه} = \text{ع} = 0$

ملاحظة - يجب أن يتنبه الطالب للفوق بين ما يستنتج من كل من المتساويتين الآتيتين

$$(1) \dots \dots \dots 0 = (\text{س} - \text{صه}) + (\text{صه} - \text{ع})$$

$$(2) \dots \dots \dots 6 = (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1)$$

فمن الأولى نستنتج أن  $\text{س} - 1 = 6$  أو  $\text{صه} - 1 = 6$

في آن واحد أما الثانية فنستدل منها على أحد أمرين وهما إما أن تكون

$$\text{س} - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad \text{صه} - 1 = 0$$

(تمارين ٢٩ ح)

أثبت كلا من المتطابقات الآتية

$$(1) \text{ب} (\text{س}^2 + \text{صه}^2) + 1 \text{س} (\text{س}^2 - \text{صه}^2) + (\text{صه}^2 - 1) = (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$= (\text{س}^2 + \text{صه}^2 + 1\text{س} - \text{صه}^2)$$

$$(2) (\text{س}^2 + \text{صه}^2) + 1\text{س} (\text{س}^2 - \text{صه}^2) + (\text{صه}^2 - 1) = (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$= (\text{س}^2 + \text{صه}^2 + 1\text{س} - \text{صه}^2)$$

$$(3) (\text{س}^2 + \text{صه}^2) + 1\text{س} (\text{س}^2 - \text{صه}^2) + (\text{صه}^2 - 1) = (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$= (\text{س}^2 + \text{صه}^2 + 1\text{س} - \text{صه}^2)$$

$$(4) (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1) = (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1) = (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$(5) (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1) = (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1) = (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$= (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$(6) (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1) = (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$= (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$(7) (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1) = (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$= (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$(8) (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1) = (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$= (\text{س} - 1)(\text{صه} - 1) + (\text{س} + 1)(\text{صه} + 1)$$

$$(9) \text{إذا كان} \quad \text{س} + \text{صه} + \text{ع} = 0$$

$$\text{فبعض على أن} \quad \text{س}^2 + \text{صه}^2 + \text{ع}^2 = 3\text{س} \text{صه} \text{ع}$$



$$(١٠) \text{ برهن على أن } ٣ = (١-١) + (١-١) + (١-١) \\ (١-١) (١-١)$$

إذا كانت  $٣ = ١ + ١ + ١$  فبرهن على أن

$$(١١) \quad ٣ + ١ + ١ = ٤ + (١-٢) + (١-٢) + (١-٢)$$

$$(١٢) \quad ٣ = ١ + ١ + ١ + (١-٢) + (١-٢) + (١-٢)$$

$$(١٣) \quad ١٦ = (١-٢) (١-٢) (١-٢) (١-٢) - ١ - ١ - ١ - ١$$

$$(١٤) \quad (١-٢) (١-٢) ١ + (١-٢) (١-٢) ٢$$

$$٣ = (١-٢) (١-٢) ٣ + (١-٢) (١-٢) ٤$$

إذا كانت  $٣ = ١ + ١ + ١$  فبرهن على أن

$$(١٥) \quad (١-٣) (١-٣) (١-٣) = (١-٣) + (١-٣) + (١-٣)$$

$$(١٦) \quad ١ = \frac{١}{١+١+١} + \frac{١}{١+١+١} + \frac{١}{١+١+١}$$

برهن على أن

$$(١٧) \quad (١-٣) + (١-٣) + (١-٣) = (١-٣) + (١-٣) + (١-٣) \\ (١-٣) + (١-٣) + (١-٣) = (١-٣) + (١-٣) + (١-٣)$$

إذا كانت  $٣ = ١ + ١ + ١$  فبرهن على أن

$$(١٨) \quad (١-٣) + (١-٣) + (١-٣) = (١-٣) + (١-٣) + (١-٣)$$

$$٠ = (١-٣) (١-٣) (١-٣)$$

$$(١٩) \quad \text{إذا كانت } ٣ = ١ + ١ + ١ \text{ فوجد قيمة } ٣ + ٣ + ٣$$

$$٣ + ٣ + ٣ = ٩$$

$$(٢٠) \quad \text{أوجد قيمة } ١ + (١+١) + (١+١) + (١+١)$$

$$\text{إذا كانت } ١ = ١, ٨ = ٨, ٦ = ٦$$

$$(٢١) \quad \text{برهن على أن } (١-١) + (١-١) + (١-١)$$

$$(٢٢) \quad (١-١) (١-١) ٢ + (١-١) (١-١) ٢ + (١-١) (١-١) ٢ =$$

$$(١-١) (١-١) ٢ + (١-١) (١-١) ٢ + (١-١) (١-١) ٢ =$$

$$(١-١) (١-١) (١-١) (١-١) (١-١) =$$

$$(١-١) (١-١) (١-١) (١-١) (١-١) =$$

$$[ (١-١) (١-١) (١-١) (١-١) (١-١) ] =$$



فإذا رتبنا هذا البسط على حسب قوى الحرف  $u$  ينص أن

$$\begin{aligned} \text{معامل } u^2 &= \{1 - (u - 1) + (u - 1)^2 - (u - 1)^3 + \dots\} = \{1 - u + 1 - u + u^2 - u^2 + u^3 - u^3 + \dots\} \\ \text{معامل } u &= \{1 - (u - 1) + (u - 1)^2 - (u - 1)^3 + \dots\} = \{1 - u + 1 - u + u^2 - u^2 + u^3 - u^3 + \dots\} \\ &= (1 - u) \end{aligned}$$

أما الحدود الخالية من الحرف  $u$  فهي

$$\begin{aligned} &= \{1 - (u - 1) + (u - 1)^2 - (u - 1)^3 + \dots\} = \{1 - u + 1 - u + u^2 - u^2 + u^3 - u^3 + \dots\} \\ &= \{1 - u + 1 - u + u^2 - u^2 + u^3 - u^3 + \dots\} \\ &= \frac{(1 - u)(1 - (u - 1))}{(1 - u)(1 - (u - 1))} = \frac{(1 - u)(1 - u + 1)}{(1 - u)(1 - u + 1)} = \frac{(1 - u)(1)}{(1 - u)(1)} = 1 \end{aligned}$$

(ملاحظة) مما يسهل حل الامثلة التي من هذا القبيل تذكر المتطابقات الآتية جيدا حتى يعود الطالب نفسه استعمالها بدون أن يصرف وقتا في التفكير فيها

$$\begin{aligned} \text{صفر} &= (u - 1) + (1 - u) + (u - 1)^2 + (1 - u)^2 + \dots \\ \text{صفر} &= (u - 1) + (1 - u) + (u - 1)^2 + (1 - u)^2 + \dots \\ (u - 1)^2 + (1 - u)^2 &= (u - 1)^2 + (1 - u)^2 + (u - 1)^3 + (1 - u)^3 + \dots \\ (u - 1)^3 + (1 - u)^3 &= (u - 1)^3 + (1 - u)^3 + (u - 1)^4 + (1 - u)^4 + \dots \\ (u - 1)^4 + (1 - u)^4 &= (u - 1)^4 + (1 - u)^4 + (u - 1)^5 + (1 - u)^5 + \dots \end{aligned}$$

ولا بأس بتذكر بعض المتطابقات المذكورة في التمرين (التاسع والعشرين) لأنها مفيدة أيضا

(تمارين ٢٩ د)

اختصر ما يأتي

$$\begin{aligned} (1) & \frac{u}{(u-1)(1-u)} + \frac{1}{(1-u)(u-1)} + \frac{1}{(u-1)(1-u)} \\ (2) & \frac{u^2}{(u-1)(1-u)} + \frac{1}{(1-u)(u-1)} + \frac{u}{(u-1)(1-u)} \\ (3) & \frac{u^3}{(u-1)(1-u)} + \frac{1}{(1-u)(u-1)} + \frac{u^2}{(u-1)(1-u)} \\ (4) & \frac{u^4}{(u-1)(1-u)} + \frac{1}{(1-u)(u-1)} + \frac{u^3}{(u-1)(1-u)} \\ (5) & \frac{(u+1)u}{(u-1)(1-u)} + \frac{(u+1)1}{(u-1)(1-u)} + \frac{(u+1)u}{(1-u)(u-1)} \\ (6) & \frac{1}{(u-1)(1-u)} + \frac{1}{(1-u)(u-1)} + \frac{1}{(u-1)(1-u)} \\ (7) & \frac{u^2}{(u-1)(1-u)} + \frac{1}{(1-u)(u-1)} + \frac{u}{(u-1)(1-u)} \end{aligned}$$



ومعلوم أنه لو كان الباقي صفراً لكانت القسمة صحيحة ولا يكون الباقي صفراً إلا إذا كان

$$0 = (u - v) \{ 1 - (p - q) \} + s - r + u - v$$

$$\text{أو } s - r = \frac{v - (1 - p)u}{(1 - p) \{ 1 - (p - q) \}}$$

وعلى ذلك يكون المقدار (١) يقبل القسمة على (٢) متى كانت قيمة  $s - r$  هذه القيمة الأخيرة

$$0 = (1 - p) \{ 1 - (p - q) \} + s - r + u - v$$

$$0 = (1 - p)u - r + v$$

فإننا نستنتج من ذلك أن الباقي يساوي صفراً مهما كانت قيمة  $s - r$

وعليه فالمقدار  $s^2 + ط s^2 + u + s - r + 1 + s + u$  يقبل القسمة على  $s^2 + 1 + s + u$

$$0 = (1 - p) \{ 1 - (p - q) \} + s - r + u - v$$

$$0 = (1 - p)u - r + v$$

بند ٢٢٦ — لمعرفة الشرط الذي به يكون  $s^2 + ط s^2 + u + s - r + 1 + s + u$  مربعا كاملاً نستخرج الجذر التربيعي بالطريقة المعتادة فيحصل

$$\begin{array}{r} s^2 + ط s^2 + u + s - r + 1 + s + u \\ \hline \frac{ط}{4} + s - r \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{ط}{4} + s - r \quad \begin{array}{l} ط s^2 + u \\ \hline ط s^2 + s - r \\ \hline \frac{ط}{4} \end{array} \\ \hline \frac{ط}{4} - u \end{array}$$

وإذا كانت  $s^2 + ط s^2 + u + s - r + 1 + s + u$  مربعا كاملاً يجب أن يكون الباقي وهو  $u - \frac{ط}{4}$  صفراً

$$0 = \frac{ط}{4} - u$$

$$\text{أو } ط u = \frac{ط}{4}$$

بند ٢٢٧ — للبرهنة على أن المقدار  $s^2 + ط s^2 + u + s - r + 1 + s + u$  هو مربع كامل إذا كان  $(u - \frac{ط}{4})^2 = ط u$  هـ ٦  $ط u = ط^2$

قول إنه من الواضح أن الجذر التربيعي لابد أن يكون مقدارا ذا ثلاثة حدود على صورة  $s^2 + ل s + م$

فاذا وضعنا  $s^2 + ط s^2 + u + s - r + 1 + s + u = (s^2 + ل s + م)^2$  وربعنا

الطرف الأيسر من هذه المتساوية نجد أن

$$s^2 + ط s^2 + u + s - r + 1 + s + u$$

$$= s^2 + ٢ ل s + (ل^2 + ٢ م) + ٢ ل م + م^2$$



وعلى ذلك لو اعتبرنا  $s = 1$

ويظهر من ذلك أنه عند قسمة مقدار جبري على  $s$  - يمكن إيجاد باقي القسمة بوضع 1 بدل  $s$  في المقدار المذكور .

إِذَا صَارَ مَقْدَارُ جَهْرِيٍّ صَحِيحٍ جَهْرِيٍّ مُشْتَمِلٍ عَلَى الْحُرُوفِ سَهْ مَسَاوِيَا لِلصَّغْرِ عِنْدَ وَضْعِ أَ بَدَلَا مِنْ سَهْ فِيهِ فَلَا يَدَّ أَنْ يَكُونَ سَهْ - أَ أَحَدُ عَوَامِلِهِ

نقول إنه بطريق التحسّن نجد أنّ المقدار يساوي الصفر إذا وضعنا ٣ بدلاً من  $s$  وتكون  
 إذن  $s = ٣$  عاملاً له

(ملاحظة) المقادير العددية التي يمكن تجربتها ووضعه بدلا من  $\pi$  يلزم أن لا تتعدى عوامل الحد الأخير في المقدار في المثل المتقدم لو جربنا العدد  $\pi$  وذلك بوضعه بدل  $\pi$  لاستفجننا أن  $\pi + \pi$  عامل للمقدار (مثال ٢) لايجاد باقي قسمة  $\pi^4 - \pi^3 + \pi - 2$  على  $\pi + 2$

(مثال ۳) تحلیل  $u = (u - v) + (v - w) + (w - x) + (x - y) + (y - z) + (z - u)$  إلى عوامله

$$(1) \dots (n-1)(1-p)(p-u)_m = (n-1)u1 + (1-p)1p + (p-u)p1 \therefore$$

ولكون الطرف الأيمن لهذه المتطابقة من الدرجة الثالثة بالنسبة للحروف  $a, b, c$  فلا بد أن يكون العامل  $m$  الذى فى الطرف الأيسر كمية رقمية خالية من الحروف  $a, b, c$ . ويمكن إيجاد قيمته إما بوضع مقادير مخصوصة للحروف  $a, b, c$  فى (١) أو بتكوين متساويات من معاملات الحدود المتشابهة فى كل من الطرفين ومن أيا نستخرج قيمة  $m$ .

لنفرض أن  $1 = صفر$  و  $0 = ١$  و  $٢ = ٦$  فالمتطابقة (١) تصبح

$$٢(١ - ) + ٠ + ٠ = م(١ - ) \times ٢ \times (١ - )$$

$$١ - = م$$

ومن هذا ينتج أن

$$٠ = (١ - ) + (١ - ) + (١ - ) + (١ - ) = (١ - ) + (١ - ) + (١ - ) + (١ - )$$

بند ٢٣٠ - سنأتى الآن على البراهين العمومية لما ذكرناه في بند ٥٥ بفرض أن  $٠$  كمية صحيحة موجبة

(أولاً) لاثبات أن  $٠ - ٠ = ٠$  قبل القسمة دائماً على  $٠ - ٠$

نعلم من نظرية الباقي أنه لو قسم  $٠ - ٠$  على  $٠ - ٠$  فالباقي يكون

$$٠ - ٠ = صفر$$

ومن ذلك نستنتج أن  $٠ - ٠ = ٠$  قبل القسمة على  $٠ - ٠$  دائماً

(ثانياً) لاثبات أن  $٠ + ٠ = ٠$  قبل القسمة على  $٠ + ٠$  إذا كانت

$٠$  عدداً فردياً ولا تقبل القسمة عليه إذا كانت  $٠$  عدداً زوجياً

نقول إننا نستنتج من نظرية الباقي أننا إن قسمنا  $٠ + ٠$  على  $٠ + ٠$  فالباقي يكون

$$٠ - (٠ - ٠) = ٠$$

(١) إذا كانت  $٠$  فردية كان  $(٠ - ٠) + ٠ = ٠ - ٠ + ٠ = ٠$

(٢) إذا كانت  $٠$  زوجية كان  $(٠ - ٠) + ٠ = ٠ - ٠ + ٠ = ٠$

أى أنه يكون للقسمة باقى إذا كانت  $٠$  عدداً زوجياً ولا يكون لها باقى إن كانت  $٠$  عدداً فردياً

وهذا يثبت المطلوب

وبالطريقة عينها يمكننا أن نثبت أن  $٠ - ٠ = ٠$  قبل القسمة على  $٠ + ٠$  إذا كانت

$٠$  عدداً زوجياً وأن  $٠ + ٠ = ٠$  لا تقبل القسمة على  $٠ - ٠$  مطلقاً

إذا أجرينا عملية القسمة فى كل من الاحوال المتقدمة واستخرجنا بعض حدود الخارج فانه يمكننا

من هذا الجزء المستخرج أن نستنتج الوضع الذى سيكون عليه خارج القسمة جميعه

ويمكن تلخيص ما استنتجناه من هذا البند فيما يأتى :

(أولاً) إذا كانت  $٠$  عدداً زوجياً أو فردياً فإن

$$٠ - ٠ = (٠ - ٠) + (٠ - ٠) + (٠ - ٠) + (٠ - ٠) + \dots + (٠ - ٠)$$

(ثانياً) إذا كانت  $٠$  عدداً فردياً فإن

$$٠ + ٠ = (٠ + ٠) + (٠ + ٠) + (٠ + ٠) + (٠ + ٠) + \dots + (٠ + ٠)$$

(ثالثاً) إذا كانت  $٠$  عدداً زوجياً فإن

$$٠ - ٠ = (٠ - ٠) + (٠ - ٠) + (٠ - ٠) + (٠ - ٠) + \dots + (٠ - ٠)$$



## (تمارين ٢٩ هـ)

مامقدار سه الذي يجعل كلا من المقادير الآتية مربعا كاملا

- (١)  $س^٢ + ٦س + ١٣س^٢ + ١٣س - ١$
- (٢)  $س^٢ + ٦س + ١١س^٢ + ٣س + ٣١$
- (٣)  $س^٢ - ١٢س + (١ + ٢س)س - ١٣س + ٢$
- (٤)  $٤س^٢ - ٤س + ٢س + (٢س^٢)س - ٥س + ٢س + \frac{٢}{٣}$
- (٥)  $\frac{١٦س^٢}{٩} - \frac{١٦س}{٢} + \frac{١٢س}{٣} + \frac{٩س^٢}{١٦} - \frac{٥س}{٢} + ٦س$
- (٦)  $٣س^٢ + ١٢س + ١٣س^٢ + ٢س + ٥س + ٥$
- (٧) بأي شروط يكون المقدار  $س^٢ - ١س + ٢س - ٥س + ١$  مربعا كاملا مهما كان مقدار سه .

مامقدار سه الذي يجعل كلا من المقادير الآتية مكعبا كاملا

- (٨)  $٨س^٢ - ٣٦س + ٥٦س - ٣٩$
- (٩)  $\frac{١٦س^٢}{٢٧} - \frac{١٦س}{٣} + ٢٨س^٢$
- (١٠)  $٢س^٢ - ١٢س + ٣٩س^٢ - ٥١س$
- (١١) ما العلاقة بين ٦ و التي تجعل  $س^٢ + ١٣س + ٢س + ٥س$  مكعبا كاملا مهما كانت قيمة سه
- (١٢) ما الشروط التي تجعل المقدار

$$س^٢ + ١٣س + ٥س + ٣س + ١ + (٦س - ١٥س)س + ٣س + ٢س + ٥س$$

- (١٣) ما العدد الذي نلزم إضافته إلى  $س^٢ + ٢س$  ليصير المجموع قابلا للقسمة على سه + ٤
- (١٤) إذا كانت سه + ١ طابعا مشتركا بين  $س^٢ + ٢س + ٦س + ٥س + ١$

$$\frac{٥-٢}{٢-١} = ١ \quad \text{فتبين أن}$$

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

- |                       |                             |
|-----------------------|-----------------------------|
| (١٩) $٧٠س + ٣٩س - ٢س$ | (١٥) $س^٢ - ٦س + ١١س - ٦$   |
| (٢٠) $٢٢س - ٣١س - ٨س$ | (١٦) $س^٢ - ٥س - ٢س + ٢٤س$  |
| (٢١) $٦س + ٧س - ٢س$   | (١٧) $س^٢ + ٩س + ٢٦س + ٢٤س$ |
| (٢٢) $٦س + ١٩س - ٢س$  | (١٨) $س^٢ - ٤١س + ١٠٥س$     |



## الباب الثلاثون - نظريات الأسس

[لأساس بدراسة اللوغاريتمات (الباب التاسع والثلاثين) مع هذا الباب عقب دراسة البنود من ٢٣١ إلى ٢٤٢]  
 بند ٢٣١ - اعتمدنا في كل التعاريف والقواعد السابقة المتعلقة بالأسس على فرض أنها أعداد صحيحة موجبة فمثلا

$$(١) \quad 1^{14} = 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 \text{ إلى } ١٤ \text{ عاملا}$$

$$(٢) \quad 1^{14} \times 1^{14} = 1^{14+14} = 1^{28}$$

$$(٣) \quad 1^{14} \div 1^{14} = 1^{14-14} = 1^0$$

$$(٤) \quad (1^{14})^3 = 1^{14 \times 3} = 1^{42}$$

والنقص من هذا الباب شيئان

(أولا) إثبات القواعد الخاصة بالأسس الصحيحة الموجبة بطريقة عامة  
 (ثانيا) استعمال هذه القواعد في إيجاد معانٍ واضحة للرموز التي تكون أسسها كسورا أو أصفارا  
 أو كميات سالبة على الوجه الوافي

وسنبداً ببرهنة ثلاث نظريات مهمة معتمدين على تعريف الأس الصحيح الموجب

بند ٢٣٢ - تعريف : إذا كانت  $m$  عدداً صحيحاً موجباً فإن  $a^m$  تدل على حاصل ضرب عوامل عددها  $m$  كل منها يساوي  $a$

بند ٢٣٣ - النظرية الأولى : لإثبات أن  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  إذا كان كل من  $m$  و  $n$  عدداً صحيحاً موجباً

قول من التعريف المتقدم نعلم أن  $a^m = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ من العوامل}}$

وأن  $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ من العوامل}}$   $\therefore a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{(m+n) \text{ عوامل}}$  إلى  $m+n$  من العوامل

نتيجة : إذا فرض أن  $p$  عدد صحيح موجب أيضاً يكون  $a^p \times a^q = a^{p+q}$  بمقتضى التعريف وهكذا مهما كانت عدد العوامل

بند ٢٣٤ - النظرية الثانية : لإثبات أن  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  إذا كان كل من  $m$  و  $n$  عدداً صحيحاً موجباً  $m$  أكبر من  $n$

قول إن  $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ من العوامل}}}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ من العوامل}}} = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{(m-n) \text{ من العوامل}} = a^{m-n}$

بند ۲۳۵ - النظرية الثالثة: لا يثبت أن  $(a^m)^n = a^{mn}$  إذا كان كل من  $m$  و  $n$  عددا صحيحا موجبا

نقول إن  $(\mathbb{A})^2 = \mathbb{A} \times \mathbb{A} \times \mathbb{A} \dots$  إلى  $\infty$  من العوامل

$$= (1 \times 1 \times \dots \times 1 \text{ إلى } m \text{ من العوامل}) (1 \times 1 \times \dots \times 1 \text{ إلى } m)$$

(من العوامل) ... مع تكرار الأقواس ٥ من المرات

$$= 1 \times 1 \times 1 \dots \dots \dots \text{إلى } m \text{ من العوامل}$$

৩৭১

بند ۲۳۶ - تلك هي القوانين الاساسية للأسس بنيتها برهانها على تعريف الأس وهذا التعريف

لا يمكن تصور معناه إلا إذا كان الأس عددا صحيحا موجبا

ولكن هناك حالات يستحسن فيها استعمال أمس كمرية أو سالبه مثل

٤١ ٦ ٧-١ أوعلى وجه عام  $\frac{1}{\alpha}$  ٦ ٧-١ وهذا لا يتيسر فهمهما الآن لأن التعريف المذكور

بند ۲۳۲ الذي بنى عليه برهان ثلاث النظريات السابقة لا يسرى على الأحوال التي تكون فيها  
م كسرا أو كمية مبالغة

ومن حيث إنه من المهم أن تدخل الأمم سواء كانت موجبة أو سلبية صحيحة أو كسرية في قانون عام

واحد فسيبحث عن معنى لكل من الرضين  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$  16 مكدنا

فرض أن القانون الأساسي  $2^1 \times 2^1 = 2^2$  ينطبق عليهما ونقبس معنى كل منهما الذي يؤدي إليه تطبيق هذا القانون

(وستتضح لنا أن جميع الرموز التي نوجد لها معنى بتطبيق القانون الأساسي عليها لها علاقة أيضا بالقانونين المذكورين في النظرتين الثانية والثالثة)

سند ۲۳۷ - لایجاد معنی للرمز  $\frac{ط}{ص}$  إذا كان كل من ط و ص عددا صحيحا موجبا

نقول من حيث إن  $1^2 \times 1^2 = 1^2$  مهما كان مقدار كل من م و ن نضع  $\frac{1}{10}$  بدلا من كل من الحرفين م و ن فنجد أن

$$\frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{b^2}{c} = \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c} = \frac{b}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{b}{c} \times \frac{b}{c} \times \frac{b}{c} \text{ وكذا}$$

وبالسير على هذا النسق إلى أربعة أو خمسة أو ... من العوامل يحدث أن

$$\frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط} \times \frac{ط}{ط} \times \frac{ط}{ط} \times \dots \dots \dots \text{إلى } ط \text{ من العوامل}$$





(تمارين ١٣٠)

أكتب ما يأتي بأسس موجبة

$\frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (١٥)$	$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \quad (٨)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (١)$
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \quad (١٦)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٩)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢)$
$2-1 \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (١٧)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div 1 \quad (١٠)$	$2-1 \sqrt{2} \quad (٣)$
$\frac{2}{1\sqrt{2}} \div \frac{2}{1\sqrt{2}} \quad (١٨)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (١١)$	$2-1 \div 2 \quad (٤)$
$\frac{2}{1\sqrt{2}} \div \frac{2}{1\sqrt{2}} \quad (١٩)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (١٢)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٥)$
	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (١٣)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٦)$
	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (١٤)$	$\frac{2}{2} \sqrt{2} \quad (٧)$

أدخل ما يأتي تحت علامة الجذر بحيث تكون الأسس موجبة

$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٤)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٧)$	$\frac{2}{2} \sqrt{2} \quad (٢٠)$
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٥)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٨)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢١)$
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٦)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٩)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٢)$
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٠)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣١)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٣)$
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٢)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٣)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٤)$
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٣)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٤)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٥)$
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٤)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٥)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٢٦)$
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٥)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٦)$	
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٦)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٧)$	
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٧)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٨)$	
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٨)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٩)$	
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٣٩)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٤٠)$	
$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٤٠)$	$\frac{1}{2} \sqrt{2} \div \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (٤١)$	





$$\frac{\frac{4}{V}}{u} = \frac{1}{V} \times \frac{2}{f} = \frac{1}{V} \left( \frac{2}{f} \right) \quad (\text{مثال ۱})$$

$$P+1 = (P-1) \times \frac{1}{P-1} = P-1 \left( \frac{1}{P-1} \right) \quad (\text{مثال ٣})$$

(الحالة الأولى) نفرض أن  $\mathcal{C}$  عدد صحيح موجب

$$= (x_1 \times x_1 \times \dots \times x_1) \text{ إلى } n \text{ من العوامل} (x_2 \times x_2 \times \dots \times x_2) \text{ إلى } m \text{ من العوامل}$$

عددان صحیحان موجبان یمنٹ ان  $\frac{1}{5}(a) = 2(b)$

ومعلوم أن القوة القافية للتقدير

(11)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

وبأخذ الجذر القافى للطرفين يحدث (١)  $\frac{1}{c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$

پہلے ان (a) = 2 (a) = 1 - 1 = 0

ومن ذلك نستنتج أن هذه النظرية صحيحة على وجه الإطلاق

يمكن التعبير عن نتيجة النظرية السابقة التي برهنا عليها بالعبارة الآتية وهي أس حاصل الضرب يمكن أن يوزع على عوامله

(ملاحظة) أس المقدار الجبري لا يمكن توزيعه على الحدود الداخلة فيه

$$\left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2}\right) \text{ لا يساوى } 1 + 2$$

وأيضاً  $(1 + 2)^{\frac{1}{3}}$  يساوى  $\sqrt[3]{1+2}$  ولا يمكن وضعه على صورة أبسط

$$\text{(مثال ١)} \quad (ص ع)^{-1} (ع ص)^{-1} (ص ص)^{-1}$$

$$= ص^{-1} ع^{-1} ع^{-1} ص^{-1} ص^{-1} ص^{-1}$$

$$= ص^{-3} ع^{-2}$$

$$\text{(مثال ٢)} \quad \{1 - (1 + 1)^{-1}\} \times \{1 - (1 - 1)^{-1}\}$$

$$= \{1 - (1 + 1)^{-1}\} \times \{1 - (1 - 1)^{-1}\}$$

$$= \{1 - (1 + 1)^{-1}\} \{1 - (1 - 1)^{-1}\}$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) (1 - \frac{1}{0})$$

بند ٢٤٥ - يلاحظ أنه في إثبات ما ذكر في بند ٢٤٤ اعتبرنا ١ 6 ب أى كيتين مطلقا وقد يجمل أن يشتمل على أميس

$$\text{(مثال ١)} \quad \left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{2}\right) \div \left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{2}\right)$$

$$= \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{2} \div \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{2} = 1$$

$$\text{(مثال ٢)} \quad \left(\sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}}\right) \div \left(\sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}}\right) \div \left(\sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}} \div \sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}} \div \sqrt[3]{\frac{1-2}{1-1}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{1}} =$$

## (تمارين ٣٠ ب)

اخصر كلا من المقدارين الآتية بحيث تكون الأمتس في النواتج موجبة

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٦)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٧)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٨)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٩)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٠)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢١)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٢)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٣)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٤)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٥)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٦)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٧)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢٨)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٢)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٣)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٤)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٥)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٦)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٧)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٨)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (٩)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٠)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١١)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٢)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٣)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٤)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{3}} \quad (١٥)$$

$$\begin{array}{l|l}
 \sqrt[3]{\left(\frac{1-\sqrt[3]{\frac{14}{3}}}{\frac{11}{4}-e}\right)} \times \sqrt[3]{\left(\frac{-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}{1-e\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\right)} & \frac{\sqrt[3]{21}\sqrt[3]{2}}{1} + \frac{3}{1+3}\left(1-\sqrt[3]{1}\right) \quad (٢٩) \\
 \frac{1}{3-4} \times \frac{3(1-3\sqrt[3]{2}) \times 3\sqrt[3]{2}}{1-3\sqrt[3]{2} \times 1+3\sqrt[3]{2}} & \frac{\sqrt[3]{21}\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} + 1-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{1+3}\right)} \quad (٣٠) \\
 \frac{1+3\sqrt[3]{2}}{1+3(1-3\sqrt[3]{2})} \div \frac{1+3\sqrt[3]{2}}{1-3(3\sqrt[3]{2})} & \left\{ \frac{3}{(3-\sqrt[3]{2})^2} \times \frac{3-\sqrt[3]{2}}{(3-\sqrt[3]{2})^3} \right\} \quad (٣١) \\
 \frac{2-3\sqrt[3]{2} \times 4 - 3\sqrt[3]{2} \times 3}{1-3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}} & \frac{1}{1+1} \left( \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}} \right) \div \left( 1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right) \quad (٣٢) \\
 \frac{1+3\sqrt[3]{2} \times 6 - 4+3\sqrt[3]{2}}{7 \times 2+3\sqrt[3]{2}} & 1-\left(\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}\right) \times \frac{1}{3}-\left(\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}\right) \quad (٣٣)
 \end{array}$$

بند ٢٤٦ - من حيث إن قوانين الأسس صحيحة وطامة يمكن حينئذ إجراء عمليات الضرب والقسمة واستخراج الجذور والرفع إلى القوى في المقادير ذات الأسس الكسرية أو السالبة

بند ٢٤٧ - يتنا في بند ١٢١ أن القوى التنازلية للعرف سر هي

$$\dots \dots \dots \text{سر}^1 6 \text{سر}^2 6 \text{سر}^3 6 \text{سر}^4 6 \text{سر}^5 6 \text{سر}^6 6 \text{سر}^7 6 \text{سر}^8 6 \text{سر}^9 6 \text{سر}^{10} 6 \dots \dots \dots$$

ويمكننا إدراك سبب هذا الترتيب لو وضعنا هذه الحدود على الصورة الآتية

$$\text{سر}^2 6 \text{سر}^3 6 \text{سر}^4 6 \text{سر}^5 6 \text{سر}^6 6 \text{سر}^7 6 \text{سر}^8 6 \text{سر}^9 6 \text{سر}^{10} 6$$

(مثال ١) لضرب ٣ سر<sup>١</sup> - + سر<sup>٢</sup> + ٢ سر<sup>٣</sup> في سر<sup>١</sup> - <sup>١</sup>/<sub>٣</sub> - ٢

نرتب المضروب فيه حسب القوى التنازلية للعرف سر

$$\begin{array}{r}
 \text{سر}^2 + ٢ \text{سر}^3 + \text{سر}^4 - \frac{1}{3} \text{سر}^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{سر}^2 - \frac{1}{3} \text{سر}^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{سر}^2 + \text{سر}^2 + \frac{4}{3} \text{سر}^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{سر}^2 - ٢ \text{سر}^3 - \frac{2}{3} \text{سر}^4 - \frac{1}{3} \text{سر}^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{سر}^2 - \frac{4}{3} \text{سر}^3 - ٣ + \frac{2}{3} \text{سر}^4 - \frac{1}{3} \text{سر}^5
 \end{array}$$



$$(٧) \text{ اقسم } ١٦ \sqrt{٢} + ٢١ \sqrt{٦} + ١٥ - ٦ \text{ على } ١٦ - ١$$

$$(٨) \text{ اقسم } ٥ \sqrt{٢} - ٦ \sqrt{٤} - ٤ \sqrt{٦} - ٤ \sqrt{٣} - ٥ \text{ على } ٢ - ١$$

$$(٩) \text{ اقسم } ٢١ \sqrt{٢} + ٢٠ - ٢٧ \sqrt{١٠} - ٢٦ \sqrt{١٣} \text{ على } ١٣ - ٥$$

$$(١٠) \text{ اقسم } ٨ \sqrt{٢} - ٨ \sqrt{٥} + ٢٠ \sqrt{١٠} + ٢٠ \sqrt{٢٥} - ٢٣ \sqrt{٥٠} \text{ على } ٣ - ٢$$

ما الجذر التربيعي لكل من المقادير الآتية

$$(١١) ٩ \sqrt{٢} - ١٢ \sqrt{٢} + ١٠ - ٤ \sqrt{٢} + ١ \sqrt{٢}$$

$$(١٢) ٢٥ \sqrt{٢} + ١٦ - ١٣٠ - ٢٤ \sqrt{٢} + ٤٩ \sqrt{٢}$$

$$(١٣) ٤ \sqrt{٢} + ٩ \sqrt{٢} + ٢٨ - ٢٤ \sqrt{٢} - ١٦ \sqrt{٢}$$

$$(١٤) ١٢ \sqrt{٢} + ٤ - ١٦ \sqrt{٢} + ١٠ \sqrt{٢} + ٢٥ \sqrt{٢}$$

$$(١٥) \text{ اضرب } ١ \sqrt{٢} - ١٨ \sqrt{٢} + ٤ \sqrt{٢} - ١٢ \sqrt{٢} \text{ في } ١٤ - ١ + ١٢ \sqrt{٢} + ١٤ - ١$$

$$(١٦) \text{ اضرب } ١ \sqrt{٢} - ٢ \sqrt{٢} - ٢ \sqrt{٢} \text{ في } ١ - ١ \sqrt{٢}$$

$$(١٧) \text{ اضرب } ٢ \sqrt{٢} - ١ \sqrt{٢} - ١٢ \sqrt{٢} - ١٢ \sqrt{٢} \text{ في } ١ - ١ \sqrt{٢}$$

$$(١٨) \text{ اقسم } ٢ \sqrt{٢} + ٢ \sqrt{٢} - ١٦ \sqrt{٢} - ٢ \sqrt{٢} \text{ على } ٤ \sqrt{٢} + ٤ \sqrt{٢} + ٤ \sqrt{٢}$$

$$(١٩) \text{ اقسم } ١ - ١٢ - ٢ \sqrt{٢} + ٢ \sqrt{٢} \text{ على } ١ - ١ \sqrt{٢}$$

$$(٢٠) \text{ اقسم } ٤ \sqrt{٢} - ٨ \sqrt{٢} + ٥ - ١ \sqrt{٢} + ٣ \sqrt{٢} - ٣ \sqrt{٢} \text{ على } ٢ \sqrt{٢} - ١٢ \sqrt{٢} - ١٢ \sqrt{٢}$$

استخرج الجذر التربيعي لكل من المقادير الآتية

$$(٢١) ٩ \sqrt{٢} - ١٨ \sqrt{٢} + ١٥ \sqrt{٢} - ٦ \sqrt{٢} + ٣ \sqrt{٢}$$

$$(٢٢) ٤ \sqrt{٢} - ١٢ \sqrt{٢} + ٢٥ \sqrt{٢} - ٢٤ \sqrt{٢} + ١٦ \sqrt{٢}$$

$$(٢٣) ٨١ \left( ١ + \frac{٢ \sqrt{٢}}{٣} \right) + ٣٧ \left( \frac{١ \sqrt{٢}}{٣} \right) - ١٥٨ \left( \frac{٢ \sqrt{٢}}{٣} \right)$$

$$(٢٤) ١ + \frac{٢ \sqrt{٢}}{١٦} + \frac{٩ \sqrt{٢}}{٢ \sqrt{٢}} + \frac{١ \sqrt{٢}}{٢ \sqrt{٢}} - \frac{٢ \sqrt{٢}}{١٦}$$

بند ٢٤٨ - من الأمثلة الآتية يتضح استعمال القوانين التي حُوت بالأبواب السالفة في المقادير التي تشتمل على أسس كسرية أو سالبة

$$\left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right\} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$$

$$(2) \text{ مثال } 2 \text{ ضرب } 2 \text{ سر } 2 - \text{سر } 2 + \text{سر } 2 + \text{سر } 2 =$$

$$\text{قول إن حاصل الضرب } = 2 \text{ سر } 2 - \text{سر } 2 + \text{سر } 2 + \text{سر } 2 =$$

$$2(2 \text{ سر } 2) - 2(2 \text{ سر } 2) =$$

$$4 \text{ سر } 2 - 4 \text{ سر } 2 =$$

$$(3) \text{ مثال } 3 \text{ مربع } 3 \text{ سر } 3 - 2 \text{ سر } 3 - \frac{1}{2} \text{ سر } 3 =$$

$$9 \text{ سر } 3 + 4 \text{ سر } 3 - 1 \text{ سر } 3 - \frac{1}{2} \text{ سر } 3 =$$

$$9 \text{ سر } 3 + 4 \text{ سر } 3 - 1 \text{ سر } 3 - \frac{1}{2} \text{ سر } 3 =$$

$$9 \text{ سر } 3 - 1 \text{ سر } 3 - \frac{1}{2} \text{ سر } 3 + 4 \text{ سر } 3 =$$

وذلك باختصار الحدود المتشابهة ثم ترتيبها

$$(4) \text{ مثال } 4 \text{ لقسمه } \frac{2}{3} \text{ سر } 1 + \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \text{ على } \frac{2}{3} \text{ سر } 1 + \frac{2}{3} \text{ سر } 1 =$$

$$\left( \frac{2}{3} \text{ سر } 1 + \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \right) \div \left( \frac{2}{3} \text{ سر } 1 + \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \right) =$$

$$\left( \frac{2}{3} \text{ سر } 1 + \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \right) \div \left\{ \left( \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \right) + \left( \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \right) \right\} =$$

$$\left( \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \right) + \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \times \frac{3}{2} - \left( \frac{2}{3} \text{ سر } 1 \right) =$$

$$2 \text{ سر } 1 + 1 - 2 \text{ سر } 1 =$$

(تمارين ٣٠ د)

أكتب قيمة ما يأتي

$$(1) \left( 7 \text{ سر } 1 - \frac{1}{2} \text{ سر } 1 \right) \left( 3 \text{ سر } 1 - 9 \text{ سر } 1 \right) \left( 2 \text{ سر } 1 - 9 \text{ سر } 1 \right)$$

$$(2) \left( 4 \text{ سر } 5 - 5 \text{ سر } 1 \right) \left( 4 \text{ سر } 3 - 1 \text{ سر } 1 \right) \left( 4 \text{ سر } 2 - 3 \text{ سر } 1 \right) \left( 4 \text{ سر } 1 + 3 \text{ سر } 1 \right)$$

(١٠) (٣ ص ٥ + ٥ ص ١)	(٥) (١ ص ٢ - ٢ ص ١)
(٣ ص ٥ - ٥ ص ١)	(٦) (١ ص ١ + ١ ص ٢)
(١١) (١ ص ١ - ١ ص ٢)	(٧) (١ ص ١ - ١ ص ٢)
(١٢) (١ ص ١ + ١ ص ٢)	(٨) (٥ ص ٣ - ٣ ص ١)
(١٣) $\left\{ \frac{1}{2} (١ - ١) + \frac{1}{2} (١ + ١) \right\}$	(٩) (٤ ص ٥ + ٥ ص ١)
(١٤) $\left\{ \frac{1}{2} (١ - ١) - \frac{1}{2} (١ + ١) \right\}$	(٩) $\left( \frac{1}{2} - ١ - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$

اكتب خارج قسمة

(٢٠) ١ - ١٨ - ١ على ١٢ - ١	(١٥) ١٢ ص ١ + ١ ص ١
(٢١) ٤ ص ١ - ١ ص ١ على ١ ص ٢	(١٦) ٢٧ ص ١ - ١ ص ١
(٢٢) ١ - ٤ ص ١ على ١ ص ١	(١٧) ١٦ ص ١ - ١ ص ١
(٢٣) ١ - ١ ص ١ على ١ ص ١	(١٨) ٨ ص ١ + ١ ص ١
(٢٤) ٢ ص ٢ + ٢ ص ٢ على ٢ ص ٢	(١٩) ٢ ص ٢ - ٢ ص ٢ على ٢ ص ٢

ما قيمة كل من المقادير الآتية

(٢٥)  $(٤ - \frac{1}{2} + ٢ + ٤)$

(٢٦)  $(\frac{1}{2} - ٣ - ٤ + \frac{1}{2})$

(٢٧)  $(٢ + \frac{1}{2} + ٢)$

(٢٨)  $(١ ص ١ + ٧ - ١ ص ١)$

(٢٩)  $\frac{١٨ - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + ١ + ٢ + \frac{1}{2}}$

(٣٠)  $\left( \frac{٢}{١} + ١ \right) \div \frac{٧ - ١}{١٤ - ١٥ - ١}$

(٣١)  $\frac{٢ - ٢}{٢ - ٤ + ٤ + ٢}$

(٣٢)  $\frac{١٧}{١٧} - \frac{١ + \frac{1}{2}}{١ - ١}$



## الباب الحادى والثلاثون - مبادئ الجذور الصماء

بند ٢٤٩ - (تعريف) إذا لم يمكن استخراج جذركية بالضبط فجذرها يسمى أصم

$$\text{مثلا } \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{27} \text{ جذور صماء}$$

وعلى مقتضى ما جاء فى الباب السابق نرى أن هذه الجذور ما هى إلا كيات ذات أسس كسرية لأنه يمكن كتابة الأمثلة السابقة هكذا

$$\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(3+2+1)} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$$

ومن حيث إنه يمكن وضع الجذور الصماء على صورة كيات ذات أسس كسرية فإذا أريد ربط هذه الجذور بعضها ببعض فالتا استعمال نفس القوانين الجبرية التى تسرى على غيرها من الرموز .

بند ٢٥٠ - قد يمكن وضع الكية على صورة جذر أصم وإن لم تكن فى الحقيقة كذلك .

$$\text{مثلا } \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6} \text{ هو فى الحقيقة } \sqrt[3]{27} \text{ ولأنه جذر أصم صورة .}$$

بند ٢٥١ - يقال أحيانا للجذور الصماء إنها كيات غير جذرية ويقال للقادر التى ليست بجذور صماء إنها كيات جذرية وذلك على سبيل تمييزها عن الجذور الصماء .

بند ٢٥٢ - علمنا أن الجذور الصماء العديدة مثل  $\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$  لا يمكن تقدير قيمتها بالضبط ولكن قد يمكن استخراج هذه القيم بالتقريب وتزداد قربا من الحقيقة بزيادة عدد الأرقام العشرية فى ناتج الجذور .

$$\text{مثلا } \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6} = 2,236068$$

أى إن  $\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$  أكبر من ٢,٢٣٦٠٦ وأصغر من ٢,٢٣٦٠٧ . وحيث أن الخطأ يكون أقل من ٠,٠٠٠٠١ . إذا استعملنا إحدى هاتين القيمتين بدل  $\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$  فإذا زدنا الأرقام العشرية ازدادنا قربا من الحقيقة .

ويتضح من ذلك أن استعمال الجذور الصماء فى الأمثلة الحسابية ليس محملا أصلا فى الأحوال التى يطلب فيها جواب تقريبي ولكنا سنبرهن فى هذا الباب على قواعد ارتباط الجذور الصماء بعضها ببعض وذلك يمكننا من استعمال رموز مثل  $\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$  بمقاديرها الحقيقية لا التقريبية مادامت تلك الرموز على شكلها الجذرى . وفضلا عن ذلك سنرى أنه حتى فى المسائل التى يراد فيها الحصول على ناتج تقريبي يستحسن لتسهيل العمل حفظ الجذور الصماء بشكلها الجذرى وعدم وضع قيمتها الحسابية بدلها إلا فى آخر العملية إذا اقتضى الحال ذلك .

بند ٢٥٣ - يدل على درجة الجذر الأصم دليله مثلا درجة  $\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$  ودرجة  $\sqrt[3]{27}$  الثالثة ودرجة  $\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$  النونية وأكثر الجذور شبيها بالجذور التربيعية مثل  $\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6}$  + صه ويقال لها أحيانا جذور الدرجة الثانية .

بند ٢٥٤ - يحسن أحيانا أن نضع الكمية الجذرية على صورة جذر أصم ويمكن أن نوضع أى كمية جذرية فى صورة جذر أصم بدرجة ما وذلك برفعها إلى القوة التى جذرها يساوى ذلك الجذر الأصم وإدخال تلك القوة تحت علامة الجذر.

$$\sqrt[5]{7} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[3]{7^{20}} = \sqrt[2]{7^{40}} = 7^{10} = 5 \quad \text{وعلى ذلك يكون}$$

$$\sqrt[5]{(s+1)^2} = \sqrt[4]{(s+1)^8} = \sqrt[3]{(s+1)^{24}} = \sqrt[2]{(s+1)^{48}} = s + 1 \quad 6$$

بند ٢٥٥ - يمكن تحويل جذر من درجة ما إلى جذر من درجة أخرى أو بعبارة أخرى يمكن تحويل جذر بأى دليل إلى جذر آخر بدليل مغاير للأول .

أمثلة

$$\sqrt[10]{17} = \sqrt[5]{17^2} = \sqrt[4]{17^5} = \sqrt[3]{17^{10}} = \sqrt[2]{17^{20}} = \sqrt[1]{17^{40}} \quad (1) \quad \sqrt[4]{2} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[2]{2^6} = \sqrt[1]{2^{12}} \quad (2)$$

بند ٢٥٦ - يمكن تحويل الجذور الصماء المختلفة الدليل وجعل دليلها واحدا وقد يكون ذلك الدليل أى مضاعف لكل من الأدلة المختلفة ولكن قد يختار المضاعف المشترك البسيط غالبا .

(مثال) لتحويل  $\sqrt[4]{3}$   $\sqrt[3]{6}$   $\sqrt[2]{7}$  إلى جذور صماء بأدنى دليل متحد .

نقول إن المضاعف البسيط للأعداد ٤ ٣ ٦ هو ١٢ وتحويل جميع هذه الجذور إلى جذور

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[2]{3^6} \quad \sqrt[3]{6} = \sqrt[2]{6^4} = \sqrt[4]{6^{16}} \quad \sqrt[2]{7} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[12]{7^{60}}$$

بند ٢٥٧ - لترتيب الجذور المختلفة الأدلة حسب مقاديرها يلزم أولًا تحويلها إلى جذور ذات دليل واحد

(مثلا) لترتيب  $\sqrt[4]{10}$   $\sqrt[3]{6}$   $\sqrt[2]{3}$  حسب مقاديرها

نقول إن المضاعف البسيط المشترك للأعداد ٢ ٣ ٤ هو ١٢ وتحويل الثلاثة إلى جذور

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[3]{10^3} = \sqrt[2]{10^6} \quad \sqrt[3]{6} = \sqrt[2]{6^4} = \sqrt[12]{6^{16}} \quad \sqrt[2]{3} = \sqrt[12]{3^{60}} \quad \text{نجد أن}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[3]{10^3} = \sqrt[2]{10^6} \quad \sqrt[3]{6} = \sqrt[2]{6^4} = \sqrt[12]{6^{16}} \quad \sqrt[2]{3} = \sqrt[12]{3^{60}}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[3]{10^3} = \sqrt[2]{10^6} \quad \sqrt[3]{6} = \sqrt[2]{6^4} = \sqrt[12]{6^{16}} \quad \sqrt[2]{3} = \sqrt[12]{3^{60}}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[3]{10^3} = \sqrt[2]{10^6} \quad \sqrt[3]{6} = \sqrt[2]{6^4} = \sqrt[12]{6^{16}} \quad \sqrt[2]{3} = \sqrt[12]{3^{60}}$$

(تمارين ١٣١)

ضع كلا من المقادير الآتية على صورة جذر دليله ١٢ بأس موجب

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1 \quad (4) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1 \quad (5) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \div 1 - 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad (6) \quad \sqrt[3]{1-2} \times \sqrt[4]{1-2} \quad (3)$$

ضع كلا من المقادير الآتية على صورة جذور دليله  $\frac{1}{5}$  بأم موجب

$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١١)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (٧)
$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٢)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (٨)
$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٣)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (٩)
$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٤)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٠)

ضع المقادير الآتية على صورة جذور بأدنى دليل متحد

$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (٢٠)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٥)
$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (٢١)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٦)
$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (٢٢)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٧)
$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (٢٣)	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٨)
	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ (١٩)

بند ٢٥٨ - جذر أى مقدار يساوى حاصل ضرب جنور عوامله

$$\frac{1}{5} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{1}{5} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \text{بند } ٢٤٤$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

وهكذا مهما بلغ عدد العوامل

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \quad (\text{مثال } ١)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \quad (\text{مثال } ٢)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \quad (\text{مثال } ٣)$$

من الأمثلة المتقدمة يظهر أنه يمكن أحيانا وضع الجذر الأصم على صورة حاصل ضرب كمية جذرية في جذر أصم

وإذا حول الجذر الأصم إلى هذه الصورة يقال إنه حول إلى أبسط صورة

فأبسط شكل للقدر ١٢٨٧ إنف ٢٢٨  
وبالعكس يمكن إدخال معامل الجذر الأصم تحت علامة الجذر بوضعه أولا على صورة جذر أصم  
ثم ضرب الجذرين الأصمين أحدهما في الآخر

$$(مثال ١) \quad \sqrt{2457} = \sqrt{7} \times \sqrt{351} = \sqrt{2457}$$

$$(مثال ٢) \quad \sqrt{817} = \sqrt{9} \times \sqrt{91} = \sqrt{817}$$

إذا حول الجذر الأصم إلى هذه الصورة سمي الناتج جذرا أصم محضا  
بند ٢٥٩ - الجذور الصماء التي يكون أو يمكن أن يكون فيها عامل غير جذري مشترك يسمى  
متشابهة ولا سميت غير متشابهة

$$مثلا \quad \sqrt{37} \div 6 \quad \sqrt{3726} \quad \sqrt{375} \quad \sqrt{3723}$$

$$أما \quad \sqrt{3726} \quad \sqrt{3723} \quad \sqrt{372} \quad \sqrt{37}$$

$$وكذلك \quad \sqrt{3723} \quad \sqrt{3726} \quad \sqrt{372} \quad \sqrt{37}$$

$$لأن \quad \sqrt{3726} = \sqrt{372} \times \sqrt{3} = \sqrt{372} \times \sqrt{3723} = \sqrt{3723}$$

$$6 \quad \sqrt{37} \div 6 = \sqrt{37} = \sqrt{37}$$

بند ٢٦٠ - يلزم جمع الجذور الصماء المتشابهة أن توضع أولا في أبسط صورة ثم يجعل مجموع  
معاملات المقدار الجذري المشترك بينها معاملا لهذا المقدار الأصم المشترك فيها

$$(مثال ١) \quad \sqrt{3723} + \sqrt{3726} + \sqrt{372} = \sqrt{3723}$$

$$نقول إن حاصل الجمع = \sqrt{3723} + \sqrt{3726} + \sqrt{372} = \sqrt{3723}$$

$$(مثال ٢) \quad \sqrt{3723} + \sqrt{3726} + \sqrt{372} = \sqrt{3723}$$

$$= \sqrt{3723} + \sqrt{3726} + \sqrt{372} = \sqrt{3723}$$

$$= \sqrt{3723} + \sqrt{3726} + \sqrt{372} = \sqrt{3723}$$

بند ٢٦١ - لا يمكن اختصار الجذور الصماء غير المتشابهة

فمثلا لا يمكن أن يوضع حاصل جمع  $\sqrt{3723} + \sqrt{3726} + \sqrt{372}$  في صورة أبسط من  
 $\sqrt{3723} + \sqrt{3726} + \sqrt{372}$

(تمارين ٣١ ب)

حول كلا من المقادير الآتية إلى أبسط صورة

$$(١) \quad \sqrt{2887} \quad (٢) \quad \sqrt{2567} \quad (٣) \quad \sqrt{15073}$$

$$(٤) \quad \sqrt{4327} \quad (٥) \quad \sqrt{72072} \quad (٦) \quad \sqrt{72072}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (15) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (11) & \sqrt[4]{240} \sqrt[4]{240} \sqrt[4]{240} \sqrt[4]{240} (7) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (16) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (12) & \sqrt[4]{1029} \sqrt[4]{1029} \sqrt[4]{1029} \sqrt[4]{1029} (8) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (17) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (13) & \sqrt[4]{3125} \sqrt[4]{3125} \sqrt[4]{3125} \sqrt[4]{3125} (9) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (18) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (14) & \sqrt[4]{2187} \sqrt[4]{2187} \sqrt[4]{2187} \sqrt[4]{2187} (10) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (19) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (20) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (21)
 \end{array}$$

حول كلام من المقادير الآتية إلى جذر أصم محض

$$\begin{array}{c|c}
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (22) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (23) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (24) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (24) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (25) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (25) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (26) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (26) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (27) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (27) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (28) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (28) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (29) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (29) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (30) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (30) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (31) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (31) \\
 \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} (32) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (32)
 \end{array}$$

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

$$\begin{array}{c|c}
 \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (33) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (33) \\
 \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (34) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (34) \\
 \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (35) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (35) \\
 \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (36) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (36) \\
 \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (37) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (37) \\
 \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (38) & \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} \sqrt[4]{1296} (38)
 \end{array}$$

بند ٢٦٢ - قاعدة لضرب جذرين متحدى الدليل نضرب العوامل غير الجذرية بعضها في بعض والعوامل الجذرية بعضها في بعض كل على انفراد

$$\text{لأن } \sqrt{10} \times \sqrt{2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$1 \times (\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$\text{(مثال ١)} \quad \sqrt{10} \times \sqrt{20} = \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}$$

$$\text{(مثال ٢)} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$\text{(مثال ٣)} \quad \sqrt{10} \times \sqrt{2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

بند ٢٦٣ - إذا لم تكن الجذور بأبسط صورها يستحسن أن تحول إلى أبسط صورها قبل الضرب فإن ذلك يسهل العمل كثيرا

$$\text{(مثال)} \quad \text{حاصل ضرب } \sqrt{20} \text{ في } \sqrt{45} \text{ في } \sqrt{18} = \sqrt{16200} = \sqrt{3600 \times 45} = 60\sqrt{45} = 60 \times 3\sqrt{5} = 180\sqrt{5}$$

$$2880 = 6 \times 480 = 6 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 480 = 6 \times 2 \times 480 = 5760$$

بند ٢٦٤ - إذا أريد ضرب جذور مختلفة الدليل تحول أولا إلى جذور معادلة لها في القيمة ومتصلة الدليل ثم يتبع ما جاء في ضرب الجذور المتصلة الدليل

$$\text{(مثال)} \quad \text{لضرب } \sqrt{2} \text{ في } \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{نقول إن حاصل الضرب} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

بند ٢٦٥ - إذا أريد إيجاد المقدار المحدى لخارج قسمة  $\sqrt{2}$  على  $\sqrt{5}$  فأقول ما يسبق إلى الذهن

أن يستخرج  $\sqrt{2}$  وهو ..... ١,٤١٤٢ ..... ثم  $\sqrt{5}$  وهو ..... ٢,٢٣٦ ..... ثم يقسم ..... ٢,٢٣٦ على

..... ٢,٢٣٦ وتلك ثلاث عمليات ملة فلتسبيل العمل نضرب كلا من البسط والمقام بالتأخير من وضع

المقسوم والمقسوم عليه على صورة كسري  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$  وذلك لجعل المقام مقدارا جذريا هكذا

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{ونعلم أن } \frac{\sqrt{10}}{5} = 0,٩١٦ \dots\dots$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{0,٩١٦}{1} = 0,٩١٦ \dots\dots$$

بند ٢٦٦ - فائدة الطريقة المبينة بالبند السابق عظيمة جدا ولذلك لا يقصر استعمالها على الأحوال التي يكون مطلوبا فيها إيجاد المقادير العددية للجذور الكسرية بل قد تستعمل أيضا في حالة ما إذا كانت بسوط الكسور ومقاماتها حروفا لا أرقاما ولم يطلب إيجاد قيمتها العددية

فن المصطلح عليه أن تحقل  $\frac{\sqrt{71}}{\sqrt{7}}$  هكذا

$$\frac{\sqrt{71}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{71}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{71}}{\sqrt{7}}$$

الطريقة المتبعة في محو الجذور الصماء من مقامات الكسور تسمى طريقة جعل المقامات جذرية وذلك بضرب كل من البسط والمقام في أى عامل يجعل المقام مقدارا جذريا وسنعود إلى هذه النقطة في بند ٢٧٠ بند ٢٦٧ - لاييجاد خارج قسمة جذر أصم على جذر أصم آخر نضعهما أولا على صورة كسر ثم نحول المقام ونجعله مقدارا جذريا

(مثال ١) لقسمة ٤  $\sqrt{70}$  على ٢٥  $\sqrt{٥٦٧}$

$$\frac{4\sqrt{70}}{25\sqrt{٥٦٧}} = \frac{4\sqrt{70} \times 4}{25\sqrt{٥٦٧} \times 4} = \frac{16\sqrt{70}}{100\sqrt{٥٦٧}}$$

$$\frac{4\sqrt{70}}{25\sqrt{٥٦٧}} = \frac{4\sqrt{70} \times 4}{25\sqrt{٥٦٧} \times 4} = \frac{16\sqrt{70}}{100\sqrt{٥٦٧}}$$

$$\frac{4\sqrt{70}}{25\sqrt{٥٦٧}} = \frac{4\sqrt{70} \times 4}{25\sqrt{٥٦٧} \times 4} = \frac{16\sqrt{70}}{100\sqrt{٥٦٧}}$$

(تمارين ٣١ - ٢٠)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

$$\frac{432\sqrt{2} \times 128\sqrt{5}}{21\sqrt{2} \div 14\sqrt{6}} \quad (١١)$$

$$\frac{21\sqrt{2} \div 14\sqrt{6}}{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{1}} \quad (١٢)$$

$$\frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{1}}{0 \div \frac{11\sqrt{3}}{98\sqrt{2}}} \quad (١٣)$$

$$\frac{0 \div \frac{11\sqrt{3}}{98\sqrt{2}}}{\frac{48\sqrt{6}}{392\sqrt{2}} \div \frac{48\sqrt{3}}{112\sqrt{5}}} \quad (١٤)$$

$$\frac{\frac{48\sqrt{6}}{392\sqrt{2}} \div \frac{48\sqrt{3}}{112\sqrt{5}}}{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \div \frac{4}{3} \times \frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}} \quad (١٥)$$

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \div \frac{4}{3} \times \frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}}{\frac{18\sqrt{18}}{(3-1)\sqrt{2}} \div \frac{20\sqrt{2}}{3-1}} \quad (١٦)$$

$$\frac{18\sqrt{18}}{(3-1)\sqrt{2}} \div \frac{20\sqrt{2}}{3-1} \quad (١٧)$$

$$\frac{18\sqrt{18}}{(3-1)\sqrt{2}} \div \frac{20\sqrt{2}}{3-1}$$

$$\frac{18\sqrt{18}}{(3-1)\sqrt{2}} \div \frac{20\sqrt{2}}{3-1}$$

$$\frac{18\sqrt{18}}{(3-1)\sqrt{2}} \div \frac{20\sqrt{2}}{3-1}$$

$$\frac{18\sqrt{18}}{(3-1)\sqrt{2}} \div \frac{20\sqrt{2}}{3-1}$$

$$\frac{18\sqrt{18}}{(3-1)\sqrt{2}} \div \frac{20\sqrt{2}}{3-1}$$

$$21\sqrt{2} \times 14\sqrt{2} \quad (١)$$

$$6\sqrt{2} \times 8\sqrt{3} \quad (٢)$$

$$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \quad (٣)$$

$$5\sqrt{3} \times 15\sqrt{2} \quad (٤)$$

$$24\sqrt{3} \times 12\sqrt{8} \quad (٥)$$

$$2 - \sqrt{2} \times 2 + \sqrt{2} \quad (٦)$$

$$98\sqrt{8} \div 384\sqrt{21} \quad (٧)$$

$$24\sqrt{3} \div 27\sqrt{5} \quad (٨)$$

$$60\sqrt{5} \div 120\sqrt{13} - \quad (٩)$$

$$14\sqrt{2} \times 168\sqrt{2} \quad (١٠)$$

إذا علم أن  $\sqrt{2} = 1,41421$   $\sqrt{3} = 1,73205$   $\sqrt{5} = 2,23607$   $\sqrt{6} = 2,44949$

$$\sqrt{7} = 2,64575$$

فأوجد قيمة كل من المقادير الآتية بحيث يشمل كل ناتج على ٤ أرقام عشرية

$\frac{1}{500} \sqrt{\quad} (٢٦)$	$\frac{60}{5} \sqrt{\quad} (٢٢)$	$\frac{14}{2} \sqrt{\quad} (١٨)$
$\frac{4}{243} \sqrt{\quad} (٢٧)$	$6 \sqrt{\quad} \div 144 (٢٣)$	$\frac{20}{5} \sqrt{\quad} (١٩)$
$\frac{20}{202} \sqrt{\quad} (٢٨)$	$3 \sqrt{\quad} \div 2 \sqrt{\quad} (٢٤)$	$\frac{10}{7} \sqrt{\quad} (٢٠)$
$\frac{206}{1070} \sqrt{\quad} (٢٩)$	$\frac{1}{3 \sqrt{\quad} 2} (٢٥)$	$\frac{48}{6} \sqrt{\quad} (٢١)$

بند ٢٦٨ - قصرنا البحث إلى الآن على الجذور البسيطة مثل  $\sqrt[3]{6}$   $\sqrt[4]{5}$   $\sqrt[5]{6}$   $\sqrt[6]{5}$  + صه  
 فإذا تراكب المقدار من جذرين أصحين بسيطين أو أكثر يسمى جذراً أصم مركباً وبناء على ذلك يكون المقداران

$$172 - 173 \sqrt{\quad} + 176 \sqrt[3]{\quad} + 174 \sqrt[4]{\quad} \text{ جذرين أصحين مركبين}$$

بند ٢٦٩ - قاعدة ضرب الجذور الصماء المركبة هي عين قاعدة ضرب المقادير الجبرية المركبة

(مثال ١) لضرب  $172 - 173 \sqrt{\quad}$  في  $173 \sqrt{\quad}$

$$\text{قول إن حاصل الضرب} = 173 \sqrt{\quad} (172 - 173 \sqrt{\quad}) = (5 - 173 \sqrt{\quad}) = 173 \sqrt{\quad} - 173 \sqrt{\quad}$$

(مثال ٢) لضرب  $172 - 173 \sqrt{\quad}$  في  $173 \sqrt{\quad} + 176 \sqrt[3]{\quad} - 174 \sqrt[4]{\quad}$

$$\text{قول إن حاصل الضرب} = (173 \sqrt{\quad} + 176 \sqrt[3]{\quad} - 174 \sqrt[4]{\quad}) (172 - 173 \sqrt{\quad}) =$$

$$= 172 \sqrt{\quad} - 173 \sqrt{\quad} \sqrt{\quad} - 176 \sqrt[3]{\quad} \sqrt{\quad} + 174 \sqrt[4]{\quad} \sqrt{\quad} = 172 \sqrt{\quad} - 173 \sqrt{\quad} \sqrt{\quad} - 176 \sqrt[3]{\quad} \sqrt{\quad} + 174 \sqrt[4]{\quad} \sqrt{\quad}$$

(مثال ٣) لإيجاد مربع  $172 - 173 \sqrt{\quad}$

$$\text{قول إن} (172 - 173 \sqrt{\quad})^2 = (172 - 173 \sqrt{\quad}) (172 - 173 \sqrt{\quad}) = 172^2 - 2 \cdot 172 \cdot 173 \sqrt{\quad} + 173^2 \sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$$

$$= 172^2 - 2 \cdot 172 \cdot 173 \sqrt{\quad} + 173^2 \sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$$

$$= 172^2 - 2 \cdot 172 \cdot 173 \sqrt{\quad} + 173^2 \sqrt{\quad} \sqrt{\quad}$$

(تمارين ٣١ د)

أوجد قيمة

$$\frac{172 \times (\sqrt{\quad} + 173) (3)}{172 \times (\sqrt{\quad} + 173) (3)} \quad \left| \quad \frac{172 \times (5 - 173 \sqrt{\quad}) (1)}{172 \times (173 - 173 \sqrt{\quad}) (2)} \right.$$



$$\begin{array}{l|l}
 (5) \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{3} \sqrt{2} & (11) \sqrt{1} \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2} \\
 (6) \sqrt{3} \sqrt{4} - \sqrt{4} \sqrt{2} \quad \sqrt{3} \sqrt{5} + \sqrt{5} \sqrt{2} & (12) \sqrt{1} \sqrt{4} + \sqrt{1} \sqrt{2} - \sqrt{1} \sqrt{2} \\
 (7) \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{5} \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \sqrt{4} - \sqrt{5} \sqrt{3} & (13) \sqrt{2} - \sqrt{1} \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2} \\
 (8) \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{1} \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{1} \sqrt{2} & (14) (1 - \sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2}) \\
 (9) \sqrt{1 - \sqrt{2}} \times (\sqrt{1 - \sqrt{2}} + \sqrt{2} \sqrt{2}) & (15) (\sqrt{5} \sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2}) (\sqrt{5} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2}) \\
 (10) \sqrt{1 + \sqrt{2}} \times (\sqrt{1 - \sqrt{2}} - \sqrt{1 + \sqrt{2}}) & (16) (\sqrt{7} \sqrt{2} + \sqrt{5} \sqrt{2}) (\sqrt{7} \sqrt{2} + \sqrt{5} \sqrt{2})
 \end{array}$$

اكتب مربع

$$\begin{array}{l|l}
 (17) \sqrt{1 - \sqrt{2}} - \sqrt{1 + \sqrt{2}} & (20) \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2} \\
 (18) \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} & (21) \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} \\
 (19) \sqrt{2} \sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} & (22) \sqrt{1 - \sqrt{2}} - \sqrt{1 + \sqrt{2}}
 \end{array}$$

بند ٢٧٠ - هناك حالة من حالات ضرب الجذور المركبة جذرية بالعناية فانا إذا ضربنا مجموع جذرين أصميين تربيعيين في فوقهما يكون الناتج كمية جذرية

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ مثال } \sqrt{2} - 1 &= \sqrt{2} - \sqrt{1} = (\sqrt{2} - \sqrt{1})(\sqrt{2} + \sqrt{1}) \\
 (2) \text{ مثال } 3 - \sqrt{48} - 40 &= (\sqrt{3} \sqrt{4}) - (\sqrt{5} \sqrt{3}) = (\sqrt{3} \sqrt{4} - \sqrt{5} \sqrt{3})(\sqrt{3} \sqrt{4} + \sqrt{5} \sqrt{3}) \\
 \text{وكذا } \sqrt{2} - 1 - 16 &= (\sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2}) - (\sqrt{4}) = (\sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2} - 4)
 \end{aligned}$$

بند ٢٧١ - (تعريف) إذا اختلف جذران أصميان مركب كل منهما من جذرين تربيعيين في العلامة التي تربط حتى كل منهما فقط فانهما يسميان مترافقين

$$\sqrt{11} \sqrt{5} + \sqrt{7} \sqrt{3} \quad \text{مترافق مع} \quad \sqrt{11} \sqrt{5} - \sqrt{7} \sqrt{3}$$

$$\text{وكذا } \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} \sqrt{2} \quad \text{مترافق مع} \quad \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} \sqrt{2}$$

حاصل ضرب أي جذرين أصميين مترافقين كمية جذرية (بند ٢٧٠)

$$(19 - \sqrt{2} - \sqrt{1} \sqrt{2}) \times (\sqrt{19} - \sqrt{2} + \sqrt{1} \sqrt{2}) \quad (\text{مثال})$$

$$= (\sqrt{19} - \sqrt{2}) - 19 = (\sqrt{19} - \sqrt{2}) - 19 = 18 - \sqrt{2}$$

بند ٢٧٢ - الحالة الوحيدة لقسمه الجذور الصماء المركبة التي سلبت فيها هـ هي التي يكون فيها المقسوم عليه جذرا أصم مركبا من جذرين تربيعيين لأننا إذا وضعنا كلا من المقسوم والمقسوم عليه في صورة كسر فن السهل تحويل المقام إلى كمية جذرية بضرب كل من البسط والمقام في مترافق المقسوم عليه

(مثال ١) لقسمة  $\sqrt{273} + 4$  على  $\sqrt{273} - 5$

$$\frac{\sqrt{273} + 4}{\sqrt{273} - 5} = \text{قول إن الخارج}$$

$$\frac{\sqrt{273} + 5}{\sqrt{273} + 5} \times \frac{\sqrt{273} + 4}{\sqrt{273} - 5} =$$

$$\frac{\sqrt{2710} + \sqrt{2712} + 18 + 20}{18 - 25} =$$

$$\frac{\sqrt{2727} + 38}{7} =$$

(مثال ٢) لتحويل مقام الكسر  $\frac{2}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{17}}$  إلى كمية جذرية

$$\frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{17}}{1 - \sqrt{5} + \sqrt{17}} \times \frac{2}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{17}} = \text{قول إن المقدار}$$

$$\frac{\{1 - \sqrt{5} + \sqrt{17}\} 2}{1 - (\sqrt{5} + \sqrt{17})} =$$

$$1 - \sqrt{5} + \sqrt{17} =$$

(مثال ٣) لقسمة  $\frac{\sqrt{27} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{27} - 2}$  على  $\frac{\sqrt{27} + 7}{\sqrt{27} - 3\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{27} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{27} + 7} \times \frac{\sqrt{27} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{27} - 2} = \text{قول إن خارج القسمة}$$

$$\frac{(\sqrt{27})^2 - (3\sqrt{2})^2}{\sqrt{27} - 3\sqrt{2} + 12 - 14} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{27} + 2} =$$

$\sqrt{27} - 2 =$  وذلك بتحويل المقام الأخير إلى كمية جذرية

(مثال ٤) إذا علم أن  $٥٧ = ٢,٢٣٦٠٦٨$  فأوجد قيمة  $\frac{٨٧}{٥٧٢ - ٧}$

لذلك نول أنه بتحويل المقام من الجذر يحدث  $\frac{٨٧}{٥٧٢ - ٧} = \frac{(٥٧٢ + ٧)٨٧}{٢٠ - ٤٩}$

$$(٥٧٢ + ٧)٣ =$$

$$٣٤,٤١٦٤٠٨ =$$

نرى أنه بتحويل المقام الأخير إلى كمية جذرية قد تجنبنا إجراء عملية قسمة فيها المقسوم عليه مكون من سبعة أرقام عشرية

(تمارين ٣١ هـ)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

$$(١) (٧ + \sqrt{٢٧٩})(٧ - \sqrt{٢٧٩})$$

$$(٢) (\sqrt{٧٢٥} - ٣)(\sqrt{٧٢٥} + ٣)$$

$$(٣) (\sqrt{٧٢٢} + \sqrt{٨٢٥})(\sqrt{٧٢٢} - \sqrt{٨٢٥})$$

$$(٤) (\sqrt{٢٢٥} - \sqrt{١١٢٢})(\sqrt{٢٢٥} + \sqrt{١١٢٢})$$

$$(٥) (\sqrt{٢٢٢} - \sqrt{١٢})(\sqrt{٢٢٢} + \sqrt{١٢})$$

$$(٦) (\sqrt{٧٢٢} + \sqrt{٥٣})(\sqrt{٧٢٢} - \sqrt{٥٣})$$

$$(٧) (\sqrt{١٢} + \sqrt{١٢})(\sqrt{١٢} - \sqrt{١٢})$$

$$(٨) (\sqrt{٢٢٢} + \sqrt{٥٣ + ٦٢٢})(\sqrt{٢٢٢} - \sqrt{٥٣ + ٦٢٢})$$

$$(٩) (\sqrt{١٢} - \sqrt{١٢})(\sqrt{١٢} + \sqrt{١٢})$$

$$(١٠) (\sqrt{١٧} + \sqrt{٣ - ٢٥})(\sqrt{١٧} - \sqrt{٣ - ٢٥})$$

$$(١١) (\sqrt{٧٢٣} + ١١) \div ٢٩$$

$$(١٢) (\sqrt{٣٢٢} + \sqrt{٧٢٣}) \div ١٧$$

$$(١٣) (١ + \sqrt{٢٢٣}) \div (١ - \sqrt{٢٢٣})$$

$$(١٤) (\sqrt{٢٢٤} - \sqrt{٣٢٥}) \div (\sqrt{٢٢٧} + \sqrt{٣٢٢})$$

$$(١٥) (\sqrt{٢٢٢} - \sqrt{٢}) \div (\sqrt{٢٢٢} + \sqrt{٢})$$

$$(١٦) (\sqrt{٥٧} - ٥) \div (٢ - \sqrt{٥٧})$$

$$(١٧) \frac{\sqrt{٢٧} + \sqrt{١٢}}{\sqrt{٢٧}} \div \frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{٢٧} - \sqrt{١٢}}$$

$$(١٨) \frac{\sqrt{٥٧٦} - \sqrt{٣٢٨}}{\sqrt{٥٧٣} - \sqrt{٣٢٥}} \div \frac{\sqrt{٨} + \sqrt{١٥٧٢}}{\sqrt{١٥٧} + ٥}$$

حول مقامات الكسور الآتية إلى كميات جذرية

$\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{11} + \sqrt{2}} \quad (24)$ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{11} - \sqrt{2} + \sqrt{11}}{\sqrt{2} - \sqrt{11} + \sqrt{2} + \sqrt{11}} \quad (25)$ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{11} + \sqrt{2} + \sqrt{11}}{\sqrt{2} - \sqrt{11} - \sqrt{2} + \sqrt{11}} \quad (26)$ $\frac{3 - \sqrt{2} + \sqrt{9}}{3 + \sqrt{2} + \sqrt{9}} \quad (27)$ $\frac{\sqrt{2} + 3}{50\sqrt{2} + 32\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} \quad (28)$	$\frac{274 - 3720}{275 - 377} \quad (19)$ $\frac{772 - 6710}{772 + 672} \quad (20)$ $\frac{27 + 77}{1472 + 9} \quad (21)$ $\frac{272 + 3720}{672 + 5} \quad (22)$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad (23)$
--	--

إذا علم أن  $272 = 16421$ ،  $372 = 17320$ ،  $576 = 23607$ 

فاستخرج قيمة ما يأتي بحيث يكون في كل ناتج أربعة أرقام عشرية

$\frac{2 - \sqrt{2}}{574 - 9} \quad (32)$ $\frac{2 - \sqrt{2}}{57 + 3} \times \frac{10 + 577}{1 - \sqrt{2}} \quad (33)$ $(5 - 373) \div (374 - 7) (37 - 2) \quad (34)$	$\frac{1}{37 + 2} \quad (29)$ $\frac{57 + 3}{2 - \sqrt{2}} \quad (30)$ $\frac{37 + 57}{157 + 4} \quad (31)$
--	---

بند ٢٧٣ - الجذر التربيعي لكبة جذرية لا يمكن أن يساوى مقدارا جبريا بعضه كبة جذرية وبعضه جذر تربيعي أصم

لأنه إذا أمكن ذلك لكان  $\sqrt{2} = 1 + \sqrt{m}$  (فترض أن  $\sqrt{2}$  كبة جذرية  $\sqrt{2} = 1 + \sqrt{m}$  جذرا صم)

وبتربع الطرفين يحدث  $\sqrt{2} + 1 = m + \sqrt{m}$

$$\frac{m - 1 - \sqrt{2}}{12} = \sqrt{m} \quad \therefore$$

أى أن الجذر الأصم = كبة جذرية وهو مستحيل

بند ٢٧٤ - إذا كان  $\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1$  على فرض أن كلا من  $\sqrt{6}$  كمية جذرية وأن كلا من  $\sqrt{7}$   $\sqrt{6}$  كمية غير جذرية صماء فنستنتج من ذلك أن  $\sqrt{6} = 1$   $\sqrt{6} = 1$

لأنه إن لم تكن  $\sqrt{6} = 1$  وفرضنا أنها  $\sqrt{6} + 1 = \sqrt{6} + 1$

$$\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1$$

أى أن  $\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1$  وهذا مستحيل (بند ٢٧٣)

فأذن  $\sqrt{6} = 1$

ويصبح من ذلك أن  $\sqrt{6} = 1$

ومن حيث إن  $\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1$

نستنتج أيضا أن  $\sqrt{7} - 1 = \sqrt{7} - 1$

بند ٢٧٥ - يظهر من البند المتقدم أنه في أى معادلة موضوعة بالصورة

$$\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1 \quad (1)$$

يمكن أن تكون منها متساويتين إحداهما طرفاها المقادير غير الجذرية والأخرى طرفاها المقادير الجذرية بمعنى أن المعادلة (١) هي في الحقيقة معادلتان مستقلة إحداهما عن الأخرى وهما  $\sqrt{6} = 1$   $\sqrt{6} = 1$  ولا يصح هذا الاعتبار إلا إذا كانت كل من  $\sqrt{6}$   $\sqrt{7}$  مقادير غير جذرية صماء

$$\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1 \quad \text{بند ٢٧٦ - إذا كان}$$

$$\sqrt{7} - 1 = \sqrt{7} - 1 \quad \text{كأن أيضا}$$

(البرهان) بتربيع طرفي المتساوية الأولى يصبح أن  $\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1$   $\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1$

$$1 = 1 + \sqrt{6} \quad \text{بند ٢٧٥} \quad \therefore \sqrt{6} = 1$$

$$1 = 1 - \sqrt{6} \quad \text{فيكون إذن} \quad \sqrt{6} = 1$$

$$\sqrt{7} - 1 = \sqrt{7} - 1$$

بند ٢٧٧ - لايجاد الجذر التربيعي للقادر  $\sqrt{7} + 1$

$$\sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 1 \quad \text{فرض أن}$$

فألى مقتضى ما جاء بالبند السابق يكون  $\sqrt{6} + 1 = \sqrt{6} + 1$  (١) ...

$$\sqrt{7} = \sqrt{7} \quad (2) \quad \therefore \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

$$(\sqrt{6} - 1) = (\sqrt{6} - 1) \quad \therefore \sqrt{6} = 1$$

من المعادلتين ٢٦١

$$\sqrt{7} = \sqrt{7} \quad \therefore \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

وبضم هذه المعادلة الأخيرة إلى المعادلة (١) نجد أن

$$\frac{u - \sqrt{2} + 1}{2} = \text{صه}$$

$$\frac{u - \sqrt{2} - 1}{2} = \text{صه}$$

6

$$\frac{u - \sqrt{2} - 1}{2} + \frac{u - \sqrt{2} + 1}{2} = \sqrt{2} + 1 \quad \therefore$$

بند ٢٧٨ - نرى من مقدارى صه 6 صه اللذين أوجدناهما أن كلا منهما جذر أصم مركب ما لم تكن  $\sqrt{2} - 1$  مربعا كاملا وعلى ذلك فالطريقة التي أوردناها ببند ٢٧٧ لا تنهيد في استخراج الجذر التربيعي للقدار  $1 + \sqrt{2}$  إلا إذا كانت  $\sqrt{2} - 1$  مربعا كاملا

(مثال) لايجاد الجذر التربيعي للقيمة  $55\sqrt{2} + 16$

$$\text{فرض أن } \sqrt{55\sqrt{2} + 16} = \sqrt{2} + \sqrt{\text{صه}}$$

$$\text{فيكون } \sqrt{55\sqrt{2} + 16} = \sqrt{2} + \sqrt{\text{صه}} \quad \text{صه} + \sqrt{\text{صه}} = 55\sqrt{2} + 16$$

$$\therefore \text{صه} + \sqrt{\text{صه}} = 16 \quad (1) \dots \dots \dots$$

$$6 \quad \sqrt{2} + \sqrt{\text{صه}} = 55\sqrt{2} \quad (2) \dots \dots \dots$$

$$\therefore (\text{صه} - \sqrt{\text{صه}}) = (\text{صه} + \sqrt{\text{صه}}) - 54\sqrt{2} = 16 - 54\sqrt{2}$$

$$(2) \quad 6 \quad (1) \quad \text{من } 55 \times 4 - 16 =$$

$$9 \times 4 =$$

$$\therefore \text{صه} - \sqrt{\text{صه}} = 36 \quad (3) \dots \dots \dots$$

ومن (١) 6 (٣) نجد أن  $\text{صه} = 11$  أو  $\text{صه} = 5$  أو  $11$

فالجذر المطلوب إذن  $5\sqrt{2} + 11\sqrt{2}$

$$\sqrt{55\sqrt{2} + 16} = \sqrt{2} + 11\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 11\sqrt{2}$$

(ملاحظة) من حيث إن كل كمية لها جذران تربيعيان متساويان في القيمة ومتضادان في العلامة كان ينبغي على هذا أن نقول

$$\frac{1}{\sqrt{55\sqrt{2} + 16}} = \frac{1}{5\sqrt{2} + 11\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{55\sqrt{2} - 16}} = \frac{1}{5\sqrt{2} - 11\sqrt{2}}$$

ولكن يكفي عادة بالقيمة الموجبة وعلى ذلك فانه عند ما نفرض أن

$$\sqrt{55\sqrt{2} - 16} = \sqrt{2} - 11\sqrt{2}$$

يفهم من ذلك أن  $\sqrt{5}$  أكبر من  $\sqrt{2}$  فليس إذن من الضروري في حل الأمثلة الرقمية استعمال العلامة المزدوجة عند ما نحصل على المعادلة المقابلة للعادلة (٣) في المثال السابق

بند ٢٧٩ - إذا كانت الكمية ذات الحدين المراد استخراج جذرها تتركب من جذرين أصيين تربيعيين يتبع في الحل الطريقة الآتية

لايجاد الجذر التربيعي للكمية  $\sqrt{147} - \sqrt{175}$

نقول إن  $\sqrt{147} - \sqrt{175} = \sqrt{21} \sqrt{7} - \sqrt{25} \sqrt{7} = (\sqrt{21} - \sqrt{5}) \sqrt{7}$

$$\therefore \sqrt{147} - \sqrt{175} = \sqrt{21 - 5} \times \sqrt{7} = \sqrt{16} \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

وبمطابقة العمل كما في البند السابق نجد أن

$$\sqrt{\frac{147}{7}} - \sqrt{\frac{175}{7}} = \sqrt{21 - 5}$$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{147}{7}} - \sqrt{\frac{175}{7}}\right) \sqrt{7} = \sqrt{147} - \sqrt{175}$$

بند ٢٨٠ - يتيسر غالباً استخراج الجذر التربيعي لمقدار غير جذري ذي حدين بمجرد النظر إليه

(مثال ١) لايجاد الجذر التربيعي للمقدار  $30\sqrt{2} + 11$

كل ما يلزم إجراؤه هو البحث عن كيتين مجموعهما ١١ وحاصل ضربهما ٣٠

وعلى ذلك يكون  $30\sqrt{2} + 11 = \sqrt{5} \times \sqrt{6} + 5 + 6 = \sqrt{30} + \sqrt{5}$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

$$\therefore \sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{30\sqrt{2} + 11}$$

(مثال ٢) لايجاد الجذر التربيعي للمقدار  $10\sqrt{12} - 53$

(أولاً) نكتب المقدار بصورة يكون فيها معامل الجذر الأصغر ٢ هكذا

$$360\sqrt{2} - 53 = 10\sqrt{12} - 53$$

وحينئذ يبقى علينا أن نوجد كيتين حاصل ضربهما ٣٦٠ ومجموعهما ٥٣ وما ٨ ٦ ٤٥

$$45 \times 8 - 8 + 45 = 10\sqrt{12} - 53 \quad \text{فإن}$$

$$= (\sqrt{45} - \sqrt{8})$$

$$\therefore \sqrt{45} - \sqrt{8} = \sqrt{10\sqrt{12} - 53}$$

$$360\sqrt{2} - 53 =$$

## (تمارين ٣١ و)

أوجد الجذر التربيعي لكل من المقادير غير الجذرية ذات الحدين الآتية

$\sqrt{37\frac{4}{9} - 4\frac{1}{9}} \quad (١١)$	$\sqrt{578 - 18} \quad (٦)$	$\sqrt{1072 - 7} \quad (١)$
$\sqrt{770 + 16} \quad (١٢)$	$\sqrt{2724 - 41} \quad (٧)$	$\sqrt{3072 + 13} \quad (٢)$
$\sqrt{672 + 272} \quad (١٣)$	$\sqrt{35712 + 83} \quad (٨)$	$\sqrt{772 - 8} \quad (٣)$
$\sqrt{247 - 327} \quad (١٤)$	$\sqrt{3374 - 47} \quad (٩)$	$\sqrt{672 + 5} \quad (٤)$
$\sqrt{407 + 573} \quad (١٥)$	$\sqrt{57 + 2\frac{1}{4}} \quad (١٠)$	$\sqrt{21712 + 75} \quad (٥)$

أوجد الجذر الرابع لكل من المقادير غير الجذرية ذات الحدين الآتية

$\sqrt[4]{6720 - 49} \quad (٢٠)$	$\sqrt[4]{3\frac{1}{4} + 57\frac{3}{4}} \quad (١٨)$	$\sqrt[4]{2712 + 17} \quad (١٦)$
$\sqrt[4]{60732 + 248} \quad (٢١)$	$\sqrt[4]{378 + 14} \quad (١٩)$	$\sqrt[4]{5724 + 56} \quad (١٧)$

استخرج يجرّد النظر قيمة كل من المقادير الآتية

$\sqrt{674 + 11} \quad (٢٨)$	$\sqrt{378 + 19} \quad (٢٥)$	$\sqrt{272 - 3} \quad (٢٢)$
$\sqrt{1474 - 15} \quad (٢٩)$	$\sqrt{1572 + 8} \quad (٢٦)$	$\sqrt{372 + 4} \quad (٢٣)$
$\sqrt{2276 + 29} \quad (٣٠)$	$\sqrt{1472 - 9} \quad (٢٧)$	$\sqrt{572 - 6} \quad (٢٤)$

## المعادلات المشتملة على جذور صماء

بند ٢٨٩ - يحدث أحيانا أن يطلب حل معادلات فيها الجاهيل داخلية تحت علامة الجذر ومثل هذه المعادلات كثيرة الأنواع ويحتاج في حلها غالبا إلى استعمال شيء من التحيل وسنقتصر هنا على البسيط من هذه المعادلات وهي ما يمكن حلها على وجه الاجمال بطريقة تحويل أحد الحدود التي تحت علامة الجذر إلى أحد طرفي المعادلة على شرط أن يكون هذا الحد بمفرده ثم يربع الطرفان وبذلك يمكن رفع علامة الجذر والتخلص منها وتكرار هذه العملية يمكّن أن نتخلص من جميع الجذور الواحد بعد الآخر

(مثال ١) لحل  $\sqrt{72} - \sqrt{47} - \sqrt{11} = 1$

نقول إنه بالنقل يحدث أن  $\sqrt{72} - \sqrt{47} = 1 + \sqrt{11}$

نربع الطرفين فيحدث أن  $4 - \sqrt{74} + 1 = 1 + \sqrt{11}$

أي  $\sqrt{74} = 12$

∴  $\sqrt{7} = 3$

∴  $\sqrt{9} = 3$



$$١٣ = \sqrt[٣]{٥ - س} + ٢ \quad \text{مثال (٢) لحل}$$

$$١١ = \sqrt[٣]{٥ - س} \quad \text{نقول إنه بالنقل نجد أن}$$

$$١٣٣١ = ٥ - س \quad \text{نكعب الطرفين فنجد أن}$$

$$١٣٣٦ = س \quad \therefore$$

$$\sqrt[٣]{١ + س} + \sqrt[٣]{١٢ س} = \sqrt[٣]{٤ + س} + \sqrt[٣]{٥ + س} \quad \text{مثال (٣) لحل}$$

نقول إنه بتربيع الطرفين يحدث أن

$$١ + س + ١٢ س = (٤ + س)(٥ + س) \quad \text{وبالنقل ثم القسمة على ٢ يحدث أن}$$

$$(١) \quad \dots \dots \dots ٤ - س = \sqrt[٣]{(٤ + س)(٥ + س)}$$

$$١٦ + س - ٣٢ س = (٤ + س)(٥ + س) \quad \text{وبالتربيع يحدث أن}$$

$$١٣ س - ٥١ س - ٤ = ٠ \quad \text{أو}$$

$$(س - ١٣)(٤ + س) = ٠$$

$$س = ٤ \quad \text{أو} \quad س = -\frac{١}{١٣} \quad \therefore$$

إذا حققنا المعادلة بوضع قيمة المجهول بدله في المعادلة الأصلية نجد أن المعادلة تصبح بوضع ٤ بدل س ولا تصبح بوضع  $-\frac{١}{١٣}$  بدل س ولكن إذا غيرنا علامة الجذر الثاني في المعادلة هكذا

$$\sqrt[٣]{١ + س} + \sqrt[٣]{٥ + س} - \sqrt[٣]{٤ + س} = \sqrt[٣]{١٢ س} \quad \text{نجد إنها تصبح إن وضع } -\frac{١}{١٣} \text{ بدل س}$$

وبتربيع طرفي المعادلة بعد تغيير الإشارة نجد بعد الاختصار أن

$$(٢) \quad \dots \dots \dots ٤ - س = \sqrt[٣]{(٤ + س)(٥ + س)}$$

وبمقارنة المعادلتين (١) و (٢) نجد أنه عند مانع طرفي كل منهما تكون المعادلتان الناتجتان اللتان من الدرجة الثانية متساويتين وجذرا كل منهما عين جذرى الأخرى وهما  $٤ - ٦$  و  $-\frac{١}{١٣}$

يظهر من ذلك أنه إذا استوجب حل المعادلة تربيع طرفيها لا يمكننا أن نعلم أى المقادير التى أوجدناها للجهرول تصبح به المعادلة الأصلية إلا بعد التجربة

ولكى يمكن تحقيق المعادلة بجميع المقادير التى تستخرج للجهرول ينبغى أن نعتبر فى التحقيق علامتى الجذور

(تمارين ٣١ ن)

حل المعادلات الآتية

$$(١) \quad ٣ = \sqrt[٣]{٥ - س}$$

$$(٢) \quad ٥ = \sqrt[٣]{٧ - س}$$

$$(٣) \quad ٣ = \sqrt[٣]{٤ - س} - ٧$$

$$(٤) \quad ٧ = \sqrt[٣]{٤ - س} - ١٣$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{7} + 1 &= \sqrt{25 + 2\sqrt{7}} \quad (11) & \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} &= \sqrt{1 - 5\sqrt{2}} \quad (5) \\
\sqrt{2}\sqrt{2} &= 2 - \sqrt{33 + 8\sqrt{7}} \quad (12) & 0 &= \sqrt{14 - 8\sqrt{2}} - \sqrt{7 - 3\sqrt{2}} \quad (6) \\
0 &= \sqrt{7 + 3 + 2\sqrt{7}} \quad (13) & \sqrt{7 - 2\sqrt{2}} &= \sqrt{35 - 5\sqrt{2}} \quad (7) \\
\sqrt{73} &= \sqrt{9 + 25\sqrt{2} - 10} \quad (14) & 2 - \sqrt{3} &= \sqrt{5 - 11 - 2\sqrt{9}} \quad (8) \\
11 + \sqrt{7} &= 3 + \sqrt{4 - 2\sqrt{7}} \quad (15) & 5\sqrt{2} &= \sqrt{11 + 2\sqrt{2}} \quad (9) \\
2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{73}} &= \sqrt{8 - 9\sqrt{7}} \quad (16) & 1\frac{4}{5} - \sqrt{2} &= \sqrt{1 + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} \quad (10) \\
3 + \sqrt{7} &= \sqrt{7} - \sqrt{5 + 4\sqrt{2}} \quad (17) \\
\sqrt{73} &= \sqrt{11 - 4\sqrt{7} - 29 - 25\sqrt{2}} \quad (18) \\
\sqrt{4 + 2\sqrt{7}} &= \sqrt{2\sqrt{7}} - \sqrt{17 + 8\sqrt{7}} \quad (19) \\
\sqrt{23 - 12\sqrt{7}} &= \sqrt{3\sqrt{7}} + \sqrt{11 - 3\sqrt{7}} \quad (20) \\
2 - \sqrt{27\sqrt{7}} &= \sqrt{1 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{5 - 12\sqrt{7}} \quad (21) \\
0 &= \sqrt{21 + 4\sqrt{7} - 8 + 2\sqrt{7} + 3 + \sqrt{7}} \quad (22) \\
0 &= \sqrt{7 + 9\sqrt{7} - 1 + 4\sqrt{7} + 2 + \sqrt{7}} \quad (23) \\
\sqrt{7} + 12 &= \sqrt{14 + 2\sqrt{7}} \quad (24) \\
\sqrt{7} + \sqrt{2} &= \sqrt{14\sqrt{7}} + \sqrt{7} \quad (25) \\
\sqrt{7} + 12\sqrt{7} &= \sqrt{7 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{1 - 7\sqrt{7}} \quad (26) \\
\sqrt{15 - 14\sqrt{7}} &= \sqrt{29 + 70\sqrt{7}} \quad (27) \\
1 - \sqrt{7} &= \sqrt{11 - 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} \quad (28) \\
1 + \sqrt{2} &= \sqrt{11 - 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 8\sqrt{2}} \quad (29) \\
\sqrt{2\sqrt{7}} &= \sqrt{7 - 1\sqrt{7}} + \sqrt{1\sqrt{7}} \quad (30)
\end{aligned}$$

بند ٢٨٢ - إذا كانت الجذور موضوعة على صورة كسور في معادلة يجب محو الكسور بالطريقة المعتادة مع استعمال القواعد التي مرت في هذا الباب لربط المقادير غير الجذرية بعضها ببعض

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{6 + \sqrt{7}} = \frac{11 - \sqrt{6}}{\sqrt{73}} \quad \text{(مثال ١) الحل}$$

قول إنه بالضرب التبادلي نجد أن

$$\begin{aligned} \sqrt{23} + \sqrt{6} &= \sqrt{25} - \sqrt{6} \\ \text{أى أن} \quad \sqrt{25} - \sqrt{6} &= \sqrt{23} + \sqrt{6} \\ \sqrt{25} - \sqrt{23} &= \sqrt{6} + \sqrt{6} \\ \sqrt{2} &= \sqrt{6} \\ 3 &= \sqrt{6} \\ 9 &= 6 \end{aligned}$$

∴

$$\text{(مثال ٢) حل} \quad \sqrt{27} - \sqrt{2+9\sqrt{2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{قول إنه بعد محو الكسور يحدث أن} \quad 0 &= \sqrt{27} - \sqrt{2+9\sqrt{2}} \\ \text{أى أن} \quad \sqrt{27} &= \sqrt{2+9\sqrt{2}} \\ \text{وبالتربيع يحدث أن} \quad 27 &= 2 + 18\sqrt{2} + 18 \\ \sqrt{2} &= 16 \\ 8 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

∴

(تمارين ٣١ ح)

حل المعادلات الآتية

$$\begin{aligned} \frac{9+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}} &= \frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} - 2 \quad (٤) & \left| \begin{aligned} \frac{11-\sqrt{28}}{13-\sqrt{24}} &= \frac{21-\sqrt{26}}{14-\sqrt{23}} \quad (١) \\ \frac{17-\sqrt{26}}{6-\sqrt{22}} &= \frac{23-\sqrt{29}}{8-\sqrt{23}} \quad (٢) \\ \frac{5-\sqrt{23}}{13-\sqrt{23}} &= \frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \quad (٣) \end{aligned} \right. \\ \frac{2-\sqrt{2}}{\frac{4}{3}-\sqrt{2}} &= \frac{1-\sqrt{22}}{\frac{4}{3}+\sqrt{22}} \quad (٥) \\ \frac{26-\sqrt{27}}{21-\sqrt{27}} &= 0 - \frac{7-\sqrt{26}}{1-\sqrt{2}} \quad (٦) \\ \frac{5+\sqrt{26}}{\frac{2}{3}+\sqrt{22}} &= \frac{11-\sqrt{12}}{4\frac{2}{3}-\sqrt{24}} \quad (٧) \\ \frac{2}{\sqrt{2}+1\sqrt{2}} &= \sqrt{2} + \sqrt{1\sqrt{2}} \quad (٨) \\ \frac{2}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2} + \sqrt{1-\sqrt{2}} \quad (٩) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{8 - \sqrt{7}} = \frac{8 - \sqrt{7} - \sqrt{7}}{8 - \sqrt{7}} \quad (10)$$

$$\frac{10}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 0 + \sqrt{7} \quad (11)$$

$$\frac{1}{3 - \sqrt{47}} = \frac{3 - \sqrt{47} - \sqrt{47}}{3 - \sqrt{47}} \quad (12)$$

$$\frac{8}{32 - \sqrt{97}} + \frac{8}{32 - \sqrt{97}} = \sqrt{7} \quad (13)$$

$$\frac{1}{7 + \sqrt{7}} = 7 - \sqrt{7} \quad (14)$$

$$0 = 110 + (11 - \sqrt{7})(11 + \sqrt{7}) \quad (15)$$

$$\frac{\sqrt{7} - 12}{3 - \sqrt{7}} = \sqrt{7} \quad (16)$$

$$6 + \frac{0}{7 + \sqrt{73}} = 1 - \sqrt{7} \quad (17)$$

$$\frac{1 + \sqrt{7}}{2} + 3 = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}} \quad (18)$$

$$0 = \frac{1}{1 - \sqrt{7}} + \frac{1}{1 + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} - 1} \quad (19)$$

$$\frac{\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{7} + 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 2\sqrt{7}} = 2 \quad (20)$$

$$1 - 2 - \sqrt{7} = \frac{2 - \sqrt{7}}{1 + 2 - \sqrt{7}} \quad (21)$$

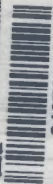
$$\frac{4}{3 + \sqrt{7}} = \frac{2}{2 - \sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7} + 6 - \sqrt{7}} \quad (22)$$







Biblioteca Alexandrina



0467387